

Leipzig, den 27.1.2020

9.) Sei Σ ein Coxeter-Komplex, und sei $A \in \Sigma$. Beweisen Sie:

i) Für zwei Kammern $C, D \in StA$ und jede Geodätische (C_0, \dots, C_m) von C zu D in Σ ist $C_i \in StA$ für $0 \leq i \leq m$.

ii) StA ist ein Coxeter-Komplex.

iii) Sei $C \in StA$ eine feste Kammer, und sei W die Coxeter-Gruppe von Σ . Dann ist die Coxeter-Gruppe W' von StA eine Untergruppe von W ; sie wird erzeugt von den Spiegelungen $\sigma \in W$ an denjenigen Wänden von C , die A umfassen.

10.) Es sei Δ ein Gebäude mit \mathcal{A} als einem geeigneten System von Appartements. Beweisen Sie, dass für jedes $A \in \Delta$ auch StA ein Gebäude – mit einem geeigneten System von Appartements – ist.

11.) Beweisen Sie, dass jedes Gebäude ein Inzidenzkomplex ist.

12.) Es sei (E, d) ein Metrischer Raum und $E' \subseteq E$. E' erfüllt die *Torbedingung* in (E, d) , falls gilt:

(T) Zu jedem $e \in E$ gibt es ein – eindeutig bestimmtes – $e' \in E'$, so dass für alle $f \in E'$ gilt:

$$d(e, f) = d(e, e') + d(e', f).$$

e' heißt dann *Tor* von E' relativ zu e ; wir schreiben dann:

$$e' = pr_{E'}(e) = pr_{E'}^E(e).$$

i) Interpretieren Sie den Begriff "Torbedingung".

ii) Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ irgendeine Metrik d auf \mathbb{R}^n und irgendeine Teilmenge E' mit $\{0\} \subsetneq E' \subsetneq \mathbb{R}^n$ an, die die Torbedingung in (\mathbb{R}^n, d) erfüllt.

In den weiteren Aufgabenteilen sei E' irgendeine Teilmenge eines Metrischen Raumes (E, d) , die die Torbedingung erfüllt.

Beweisen Sie:

iii) Für $e \in E'$ ist $pr_{E'}(e) = e$.

iv) E' ist *konvex* in E ; das heißt:

Sind $x, y \in E'$ und $z \in E$ mit $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, so ist auch $z \in E'$.