Jun.-Prof. Felix Pogorzelski
Dr. Martin Petersen

Vorlesung Funktionalanalysis I, Uni Leipzig, WS 2019/20

Serie 1

Aufgabe 1 (schriflich).

(a) Auf $X = \mathbb{R}^2$ ist die "Metrik der französischen Eisenbahn" definiert als $d : X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch 0 liegen,} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass d tatsächlich eine Metrik auf X ist.

(b) Betrachten Sie den Raum $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \big\{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}\big\}$ aller reellwertigen Folgen. Zeigen Sie, dass durch $d : X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

eine Metrik auf X definiert ist.

Aufgabe 2 (schriftlich).

(a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie für $M \subseteq X$, dass

$$\mathring{M} = \bigcup_{O \subseteq M,\, O \text{ offen}} O \qquad \text{und} \qquad \partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}.$$

(b) Man betrachte $X = \mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik. Berechnen Sie die topologischen Ränder der Teilmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $(0,1)$, $[0,1)$ und $\{0\}$.

Aufgabe 3 (mündlich).

(a) Weisen Sie nach, dass der Raum $V = C([0,1])$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit $\|\cdot\|_\infty$, ein normierter Raum ist.

(b) Es sei V wie in Aufgabe (a) und es sei $M \subseteq V$ definiert als $M := \{f \in V : \|f\|_\infty \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass M nicht kompakt ist.

Abgabe der schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in der Vorlesung am
Montag, den 21.10.2019.