Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 29. November 2019

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker

Blatt 7

Ab diesem Übungsblatt können die Übungsaufgaben in Gruppen von bis zu drei Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Setze

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 < y - x^2 < \pi \right\}.$$

Skizziere U und zeige, dass es wegzusammenhängend ist.

Zeige, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\sin(y - x^2) - x^2 \cos(y - x^2)}{\sqrt{\sin(y - x^2)}} + \frac{x \cos(y - x^2)}{2\sqrt{\sin(y - x^2)}} y' = 0$$

auf U exakt ist und bestimme ihre Lösungen.

Hinweis: Wähle der Geometrie angepasste Integrationswege so, dass die auftretenden Integrale besonders einfach werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Gegeben sei die Mannigfaltigkeit

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, y \sin(x) = z \cos(x) \right\}.$$

Wie sehen die Schnitte von M mit den Ebenen $x =$ konst. aus?

Zeige, dass

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to M \\ (t, s) &\mapsto (t, s\cos(t), s\sin(t)) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung für ganz M ist und bestimme die zugehörigen Flächenelemente.

Berechne für

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{e^{-x^2}}{(1 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

das Integral

$$\int_M f \, \mathrm{d}\sigma.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to (0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion und M die durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entstehende Fläche, das heißt

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, y^2 + z^2 = f(x)^2\right\}.$$

Zeige, dass die Oberfläche M durch

$$2\pi \int_I f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\mathrm{d}t$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Zeige, dass die Menge

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, y^2 + z^2 \leq \frac{1}{x^2}, x \geq 1\right\}$$

endliches Volumen aber unendliche Oberfläche hat.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem 05.12.2019 abzugeben.