8.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 3.12.2019
Abgabe: Dienstag, 10.12.2019 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**
1) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Wir setzen

$$h_1(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad h_2(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass auch h_1 und h_2 stetig sind.
(Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 3 (a) von Blatt 2 verwenden.)

2) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle a stetig ist. Ferner sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir setzen

$$h(x) := (f(x) - f(a))g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass h an der Stelle a stetig ist.
(Beachten Sie, dass g nicht notwendig stetig ist.)

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**
Sei $D := \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Seien $x, y \in D$ mit $x + y \in D$. Zeigen Sie

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte)**.**
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (der Definitionsbereich ist jeweils ganz $\mathbb{R}$). Geben Sie ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie das Ergebnis noch so weit wie möglich.

$(a)\ \ f(x) = x^3 e^x$ $\qquad$ $(b)\ \ f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 + 1}$

$(c)\ \ f(x) = \dfrac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1}$ $\qquad$ $(d)\ \ f(x) = (x^2 + 1)e^{x^2+1}$

Aufgabe 4 (1+1+1+1 Punkte)**.**
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (der Definitionsbereich ist jeweils ganz $\mathbb{R}$). Geben Sie ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie das Ergebnis noch so weit wie möglich.

$(a)\ \ f(x) = (x^2 - 3x)^{10^{10}}$ $\qquad$ $(b)\ \ f(x) = \dfrac{e^{x^3}}{2x^2 + 5}$

$(c)\ \ f(x) = e^{e^x}$ $\qquad$ $(d)\ \ f(x) = (e^{x^2} + x^2)^7$

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Zeigen Sie

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a-h^2)}{h} = 0.$$