Siehe Mitte dieser Seite
— passend zum Fibonaccizahlen-Exkurs!

~~(ii) Analog zu der Summendefinition in (i) können wir auch beliebig lange Produkte definieren. Es sei~~

$$\prod_{k=n_0}^{n_0} a_k := a_{n_0} \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^{n+1} a_k := \prod_{k=n_0}^{n} a_k \cdot a_{n+1} \quad \text{für } n \geq n_0 .$$

~~Für $n < n_0$ definieren wir außerdem $\prod_{k=n_0}^{n} a_k := 1$.~~

~~In Abschnitt 2.1.2 haben wir neben der Grundversion der vollständigen Induktion (siehe Satz 2.1.2) auch eine verallgemeinerte Version kennen gelernt (siehe Satz 2.1.5). Ganz analog können wir auch die rekursive Definition von Fuktionen verallgemeinern. Wir verzichten hier auf eine formale Beschreibung und geben stattdessen ein illustratives Beispiel an.~~

Beispiel (Fibonacci-Zahlen). Die Folge der *Fibonacci*[2]*-Zahlen* ist durch die folgenden Vorschriften rekursiv definiert:

$$F(0) := 0 \ , \qquad F(1) := 1 \ ,$$
$$F(n) := F(n-1) + F(n-2) \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Die folgende explizite Beschreibung der Fibonacci-Zahlen kann mit Hilfe der verallgemeinerten vollständigen Induktion (Satz 2.1.5) bewiesen werden.

Lemma 2.1.9. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die n-te Fibonacci-Zahl $F(n)$ wie folgt gegeben:*

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (a^n - b^n) \qquad \text{mit} \quad a := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

Wir lassen den Beweis des Lemmas als Übungsaufgabe.

cf. auch Stichwort „Goldener Schnitt“!

~~2.2 Gruppen, Ringe, Körper~~

~~Wir studieren in diesem Abschnitt Mengen mit bestimmten Verknüpfungen, die interessante algebraische Strukturen liefern. Das Studium dieser Strukturen ist hauptsächlich durch die uns bereits bekannten Zahlbereiche der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen und der reellen Zahlen motiviert.~~

~~2.2.1 Halbgruppen, Monoide, Gruppen~~

~~Wir definieren zunächst den Begriff einer Verknüpfung auf einer Menge. Man kann dabei beispielsweise an „Rechenoperationen“ wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division denken.~~

[2] Leonardo di Pisa, genannt „Fibonacci“ (ca. 1170–1250).