Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1 - Rechnen in verschiedenen Stellenwertsystemen

Lösen Sie die Rechenaufgaben schriftlich, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem zu übertragen. Geben Sie sämtliche Nebenrechnungen mit an.

a) Rechnen Sie die Zahl $(25679)_{10}$ ins Stellenwertsystem zur Basis $b = 8$ um.

b) $(321023)_4 + (20133)_4$

c) $(112123)_5 - (41344)_5$

d) $(1524)_7 \cdot (61)_7$

e) $(73214)_8 : (16)_8$

f) Rechnen Sie die Zahl $(1135)_6$ ins Stellenwertsystem zur Basis $b = 4$ um.

g) Begründen Sie, dass $(1020201)_3 = (1221)_9$ gilt.

Aufgabe 2 - vollständige Induktion

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $\forall n \in \mathbb{N}: \; 6|(3^n - 3)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}: \; 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
Hinweis: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}: \; 3| \left(5^{(2n+1)} + 13^n\right)$.

Aufgabe 3 - Relationen

a) Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{N}$ definierte Relation

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 5|(2a + 3b)\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie drei verschiedene Zahlen an, die in der Äquivalenzklasse $[1]_R$ liegen.

b) Untersuchen Sie, ob die auf $\mathbb{Z}$ definierte Relation

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \cdot b \geq 0\}$$

reflexiv, symmetrisch, transitiv bzw. vollständig ist.

Aufgabe 4 - Abbildungen und Verknüpfungen

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden (wohldefinierten) Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind.

1) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$
2) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z + 1$
3) $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n, m) \mapsto n + m$

b) Untersuchen Sie, ob die Verknüpfung $\circ$ eine innere Verknüpfung auf der Menge M ist.

1) M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die bei der Division durch 5 den Rest 1 oder den Rest 4 lassen.
Für alle $m, n \in M$ sei $m \circ n = m \cdot n$, wobei $\cdot$ die auf $\mathbb{N}$ definierte Multiplikation ist.
2) M ist die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
Für alle $m, n \in M$ sei $m \circ n = \dfrac{m+n}{2}$.
3) Sei $M = \{a + b \cdot \sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Für alle $m, n \in M$ sei $m \circ n = m \cdot n$, wobei $\cdot$ die auf $\mathbb{R}$ definierte Multiplikation ist.

Aufgabe 5 - algebraische Strukturen

a) Gegeben sei die Menge $M = \{1; 3; 7; 9\}$. Für alle $x, y \in M$ sei $x \circ y = z$ wobei z der Rest ist, den $x \cdot y$ bei der Division durch 10 lässt. Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Operation $\circ$ auf. Begründen Sie mit Hilfe der Tafel, dass $\circ$ eine innere Verknüpfung auf M ist, dass es in M ein neutrales Element bezüglich $\circ$ gibt und dass jedes Element aus M ein inverses Element bezüglich $\circ$ hat.

b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei a^{-1} das inverse Element von a bezüglich $\circ$. Zeigen Sie, dass $(b^{-1} \circ a^{-1}) \in G$ das inverse Element von $(a \circ b) \in G$ ist.

c) Die Menge

$$M = \{a + b \cdot \sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ist mit der üblichen Multiplikation und Addition und den aus der Schule bekannten Rechenregeln ein Körper. Es sei $k \in M$ mit $k = 1 - 2 \cdot \sqrt{3}$.

1) Geben Sie das inverse Element von k bezüglich der Addition an. Bestimmen Sie das inverse Element k^{-1} von k bezüglich der Multiplikation. Stellen Sie k^{-1} in der Form

$$k^{-1} = a + b \cdot \sqrt{3}$$

dar.
2) Untersuchen Sie, ob $\sqrt{2} \in M$ gilt.

Aufgabe 6 - der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von a und b und stellen Sie diesen mit Hilfe des erweiteren euklidischen Algorithmus als Linearkombination von a und b dar.

1) $a = 195; b = 132$

2) $a = 2387, b = 541$

b) Zeigen Sie, dass $12n - 5$ und $15n - 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind.

Aufgabe 7 - modulare Arithmetik

a) Untersuchen Sie, welchen Rest die Zahl $2017^{2017} + 2018^{2018}$ bei der Division durch 3 lässt.

b) Zeigen Sie, dass $21^{39} + 39^{21}$ durch 5 teilbar ist.

c) Berechnen Sie den Rest, den die Zahl 2015^{2015} bei der Division durch 9 lässt.

Aufgabe 8 - lineare Kongruenzen

a) Untersuchen Sie, ob die linearen Kongruenzen lösbar sind. Ermitteln Sie im Fall der Lösbarkeit alle ganzen Zahlen, welche die jeweilige lineare Kongruenz erfüllen. Geben Sie anschließend die drei kleinsten natürlichen Zahlen, welche die Kongruenz erfüllen.

1) $5x \equiv 2 \pmod{26}$

2) $6x \equiv 15 \pmod{21}$

3) $34x \equiv 60 \pmod{98}$

b) In der Methodisch Geordneten Aufgabensammlung aus dem Jahre 1880 befindet sich folgende Aufgabe:

Wie kann man den Bruch $\frac{200}{77}$ in zwei Brüche zerlegen, deren Nenner 11 und 7 sind?

1) Begründen Sie, dass die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der linearen Kongruenz

$$11x \equiv 200 \pmod{7}$$

bestimmt werden kann. Bestimmen Sie anschließend alle $x \in \mathbb{Z}$, welche diese Kongruenz erfüllen.

2) In der ursprünglichen Aufgabe sollten alle positiven Brüche ermittelt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lösung von Teilaufgabe b) alle in der ursprünglichen Aufgabe gesuchten Brüche.

c) Eine wilde Horde von 17 Piraten hatte bei einem Raubzug einen Sack voller Goldmünzen erbeutet. In diesem Sack befanden sich mehr als 400 und weniger als 500 Münzen. Nach dem gleichmäßigen Verteilen der Beute blieben zwei Münzen übrig. Uneinig darüber, was mit diesen Münzen zu geschehen hätte, gerieten die Piraten in einen erbitterten Streit, in dessen Verlauf ein Pirat getötet wurde. Erneut wurden die Münzen gleichmäßig unter den noch lebenden Piraten verteilt, wobei diesmal zehn Münzen übrig blieben. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Angaben die Anzahl der Goldmünzen.