Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum Kapitel 1.4 – Lineare Gleichungssysteme

und zum ersten Teil von Kapitel 1.5 – Matrizen – bis Beispiel 1.15

In den Kapiteln 1.4 und 1.5 – und stellenweise auch noch später – geht es um die – theoretische und praktische – Lösung *linearer Gleichungssysteme*.

In Kapitel 1.4 wird quasi "nur" erklärt, was ein *homogenes lineares Gleichungssystem* ist, das einmal vektoriell, einmal als Auflistung von – endlich vielen – linearen Gleichungen erklärt wird.

An dieser Stelle noch folgendes konkrete Beispiel:

Gegeben sei die *Vektorgleichung*

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

"Homogen" bedeutet dabei: Auf der rechten Seite steht der Nullvektor.
Ausgeschrieben bedeuten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4 \cdot t_1 - 5 \cdot t_2 &= 0, \\ 1 \cdot t_1 + 7 \cdot t_2 &= 0, \\ -3 \cdot t_1 + 8 \cdot t_2 &= 0. \end{aligned}$$

Man mag es vielleicht eher gewohnt sein, diese Gleichungen – wie gerade geschehen – auszuschreiben. Bei theoretischen Erwägungen bietet sich aber die obige vektorielle Schreibweise eher an.

Später werden wir uns auch mit *inhomogenen* linearen Gleichungssystemen beschäftigen; das sind solche, bei denen auf der rechten Seite ein anderer Vektor als der Nullvektor steht.

Um solche – homogene wie inhomogene – lineare Gleichungssysteme noch systematischer behandeln zu können, ist es zweckmäßig, *Matrizen* einzuführen.

Zum obigen linearen Gleichungssystem gehört die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also die 2 *Spaltenvektoren*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und die 3 *Zeilenvektoren*

$$M^1 = (4, -5),\ M^2 = (1, 7),\ M^3 = (-3, 8).$$

Die erhöhten Indizes sind hier natürlich *nicht als Exponenten* zu interpretieren, sondern sollen sich in ihrer Bedeutung von den – auf "normaler Tiefe" stehenden – Indizes der Spaltenvektoren unterscheiden.

Zur theoretischen Analyse linearer Gleichungssysteme werden der *Zeilenraum* Z_M und der *Spaltenraum* S_M einer gegebenen $n \times k$-Matrix M eingeführt:

Z_M ist der Unterraum von $\mathbb{R}^k$, der von allen Zeilenvektoren $M^1, ..., M^n$ der Matrix M aufgespannt wird; diese haben alle genau k Koordinaten.
Analog ist S_M der Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der von allen Spaltenvektoren $M_1, ..., M_k$ der Matrix M aufgespannt wird; diese haben genau n Koordinaten.

Der – sofort offensichtliche – Zusammenhang zu homogenen linearen Gleichungssystemen ist: Wird ein homogenes lineares Gleichungssystem durch die $(n \times k)$-Matrix M beschrieben, so ist ein Vektor $t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$ genau dann Lösung dieses Gleichungssystems, wenn das Skalarprodukt mit allen Zeilenvektoren von M den Wert 0 ergibt – wenn t also auf jedem Zeilenvektor senkrecht steht.

Satz 1.5 zeigt nun, dass auch die Spaltenvektoren von M im Zusammenhang mit der Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems von Interesse sind:
Die Unterräume Z_M – von $\mathbb{R}^k$ und S_M – von $\mathbb{R}^n$ haben immer die gleiche Dimension; diese gemeinsame Größe ist definitionsgemäß (siehe Definition 1.19) der *Rang* der Matrix M.

Es gibt mehrere Beweise zu Satz 1.5; ein algorithmischer ergibt sich aus den gleich noch zu betrachtenden *Zeilenoperationen* einer Matrix.

Vorher sei noch angemerkt: Korollar 1.3 ergibt sich durch Anwendung von Korollar 1.1 aus Kapitel 1.3 auf den Unterraum Z_M von $\mathbb{R}^k$; denn nach Korollar 1.1 gilt, siehe auch Definition 1.20 für $A = M$:

$$k = dim(Z_A) + dim(Z_A^{\perp}) = Rang(A) + dim(Kern(A)).$$

Bei einem – homogenen oder inhomogenen – linearen Gleichungssystem kann man nur in den einfachsten Fällen sofort die Lösung erkennen. – Ein eher einfacher Fall liegt vor, wenn eine Matrix – wie in Definition 1.21 – in *Zeilenstufenform* gegeben ist.

Nach Satz 1.8 lässt sich jede Matrix – nach dem **Gauß-Algorithmus** – durch *zulässige* Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen; dabei sind zulässige Zeilenoperationen nach Definition 1.22 gewisse einfache Operationen, durch die sich die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems offensichtlich nicht ändert.

Es gilt sogar noch mehr: Durch diese zulässigen Zeilenoperationen ändert sich weder die Größe $dim(Z_M)$, noch die Größe $dim(S_M)$.
Damit ergibt sich auch ein Beweis des oben genannten Satzes 1.5: Dieser Satz ist nämlich für Matrizen in Zeilenstufenform trivial.

Am Ende dieser Beobachtungen soll Beispiel 1.15 noch etwas genauer analysiert werden; hier zunächst noch einmal die Folge der Zeilenoperationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt wird sowohl von der zweiten Zeile als auch von der dritten Zeile die erste Zeile subtrahiert; von der letzten Zeile wird das Doppelte der ersten Zeile subtrahiert.
Im zweiten Schritt wird die zweite Zeile zur dritten Zeile addiert (was an sich überflüssig wäre) – und von der vierten Zeile subtrahiert.
Im dritten Schritt wird die zweite Zeile von der ersten Zeile und von der dritten Zeile subtrahiert.
Im vierten Schritt wird die dritte Zeile mit -1 multipliziert.
Im letzten Schritt wird die dritte Zeile zur vierten addiert.

Die letzte Matrix ist in Zeilenstufenform und besitzt drei Zeilen, die vom Nullvektor verschieden sind. Daher hat diese Matrix – und damit auch die erste – den Rang 3.