# Grundwissen Lineare Algebra Zusammenfassung der 2.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

19. bis 23. April 2021

# Zusammenfassung der 2.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 2.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein.
Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche wiederholen wir einige Grundlagen zu den Bereichen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen und insbesondere das wichtige Prinzip der vollständigen Induktion.
Das sind die **Abschnitte II.1 und II.2 im Skript**.

# Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ versehen mit Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$

Es gilt $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$ und die folgenden Axiome sind erfüllt:

# Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

(i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz der Addition)

(ii) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz der Addition)

(iii) $0 + a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (Null ist neutrales Element der Addition)

(iv) Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert genau ein Element $-a \in \mathbb{R}$ mit $(-a) + a = 0$. (Existenz von additiven Inversen)

(v) $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(vi) $ab = ba$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(vii) $1a = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (Eins ist neutrales Element der Multiplikation)

(viii) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert genau ein Element $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a^{-1}a = 1$. (Existenz von multiplikativen Inversen)

(ix) $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Distributivgesetz)

Weitere, daraus ableitbare Rechenregeln für $a, b \in \mathbb{R}$:

1) $0a = 0 = a0$

2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

3) $a \neq 0 \neq b \;\Rightarrow ab \neq 0$ und $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

(Siehe Lemmata II.1.1. und II.1.2. im Skript)

**Definition (Differenzen und Brüche)**

Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$a - b := a + (-b).$$

Ist $b \neq 0$, so setzen wir zudem

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

# Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

**Lemma (Bruchrechenregeln)**

*Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $\frac{a}{1} = a$ *und* $\frac{1}{b} = b^{-1}$, *falls* $b \neq 0$.

(b) $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b}\frac{c}{d}$, *falls* $b \neq 0$ *und* $d \neq 0$.
*Insbesondere ist* $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, *falls* $b, c \neq 0$ *(Kürzen/Erweitern).*

(c) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, *falls* $c \neq 0$.

(d) $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$, *falls* $a \neq 0$ *und* $b \neq 0$ *(Kehrwertbildung).*

(e) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, *falls* $b \neq 0$ *und* $d \neq 0$.

Beweis: Siehe Lemma II.1.4. im Skript.

# Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Menge der **ganzen Zahlen**:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

Menge der **rationalen Zahlen**:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen **irrationale Zahlen**.

**Ordnungsrelation** $<$ auf $\mathbb{R}$

Rechenregeln für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(i) $a < b \;\Rightarrow a \neq b$ (Irreflexivität)

(ii) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

(iii) Es gilt genau eine der drei Aussagen $a = b$, $a < b$ oder $b < a$. (Linearität)

(iv) $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$

(v) $a < b$ und $0 < c \Rightarrow ac < bc$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ bedeutet $a \leq b$ definitionsgemäß $a < b$ oder $a = b$.

Rechenregeln für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(i') $a \leq a$ (Reflexivität)

(ii') $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Transitivität)

(iii') $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$. (Antisymmetrie)

(iv') Es gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$. (Linearität)

(v') $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(vi') $a \leq b$ und $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

**Lemma**

*Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $a < b$ *und* $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

(b) $c < 0 \Leftrightarrow -c > 0$

(c) $a < b$ *und* $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

(d) $a^2 > 0$, *falls* $a \neq 0$ *(insbesondere ist* $1 = 1^2 > 0$*)*

(e) *Ist* $a > 0$, *so ist auch* $\frac{1}{a} > 0$. *Ist* $a < 0$, *so ist* $\frac{1}{a} < 0$.

(f) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(g) $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

*Analoge Aussagen gelten auch für* $\leq$ *(soweit sinnvoll).*

Beweis: Siehe Lemma II.1.5. im Skript.

### Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ wird der **Betrag** von $x$ definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

### Lemma

*Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $|xy| = |x||y|$

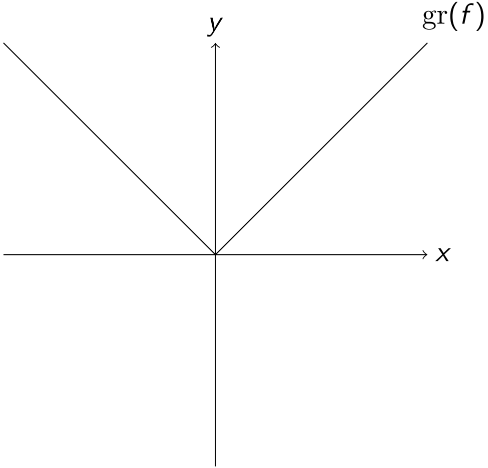
(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

(c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung)*

Beweis: Siehe Lemma II.1.7. im Skript.

# Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Der Graph der Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$:



# Vollständige Induktion

**Prinzip der vollständigen Induktion:**
Es sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, welche natürliche Zahlen besitzen können.
Es gelte:
1) 1 hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$ (**Induktionsanfang**).
2) Hat eine natürliche Zahl $n$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so hat auch $n+1$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$ (**Induktionsschritt**).
Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

(Induktionsanfang manchmal nicht bei 1 sondern bei einer anderen Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$)

**Summen- und Produktzeichen**:
Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ setzen wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

und

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \ldots a_n.$$

# Vollständige Induktion

**Potenzen**:
Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ mal}}.$$

Ferner sei $a^0 := 1$.

**Potenzgesetze**:
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad (a^m)^n = a^{nm} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

**Beispiele für Beweise mittels vollständiger Induktion**:

**1) Gaußsche Summenformel**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Beweis**:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten der obigen Formel gleich 1.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Fortsetzung des Beweises**:
Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n+1)\Big(\frac{n}{2} + 1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

was gerade die Behauptung für $n+1$ ist.

**2) Geometrische Summenformel**: Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

**Beweis**:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ sind beide Seiten gleich 1.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

# Vollständige Induktion

**Fortsetzung des Beweises**:
Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q},\end{aligned}$$

was gerade die Behauptung für $n+1$ ist.

**Teilbarkeit**: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann heißt $a$ ein **Teiler** von $b$ (in Zeichen $a \mid b$), falls ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $b = ka$ existiert.

**Bemerkung**: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:

(i) $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$

(ii) $a \mid b \Rightarrow a \mid cb$

(iii) $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$

**Weiteres Beispiel zur Induktion**:
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \mid a + b$ und $c \mid a - 1$.
Dann gilt auch $c \mid a^n + b$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis**:
Induktionsanfang $n = 1$: $a + b$ ist laut Voraussetzung teilbar durch $c$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $c \mid a^n + b$.
Es gilt

$$a^{n+1} + b = (a - 1)a^n + a^n + b$$

und nach Voraussetzung sind $a^n + b$ und $a - 1$ teilbar durch $c$.
Also ist auch $a^{n+1} + b$ teilbar durch $c$.

# Vollständige Induktion

Es gibt noch folgende Variante der vollständigen Induktion:

**Starkes Prinzip der vollständigen Induktion:**
Es sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, welche natürliche Zahlen besitzen können.
Es gelte:
1) 1 hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$ (**Induktionsanfang**).
2) Ist $n \in \mathbb{N}$ und hat jede der Zahlen $1, \dots, n$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so hat auch $n + 1$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$ (**Induktionsschritt**).
Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

(Wieder kann der Induktionsanfang manchmal auch bei einer anderen Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ erfolgen.)

### Definition

Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt **Primzahl**, falls 1 und $p$ die einzigen positiven Teiler von $p$ sind. Die Menge aller Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$.

**Beispiel**: Alle Primzahlen kleiner als 100 sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

**Satz (Existenz der Primfaktorzerlegung)**:
Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben, d. h. es existieren $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}$ mit $n = p_1 p_2 \dots p_s$.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des starken Prinzips der vollständigen Induktion (siehe Satz II.2.7. im Skript).

# Vollständige Induktion

Eine wichtige Konsequenz aus der Existenz der Primfaktorzerlegung ist der folgende Satz.

**Satz von Euklid**:
Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist unendlich.

Beweis: Siehe Satz II.2.8. im Skript.