Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar Kombinatorische Geometrie

Leipzig, den 26.7.2021

Übungsaufgaben zum Satz von Helly

I) Es sei K eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und es seien – für ein m mit $n+1 \leq m < \infty$ – abgeschlossene Halbräume

$$H_i = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle v, v_i \rangle \geq d_i\} \text{ für } 1 \leq i \leq m$$

mit gewissen $v_1, .., v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $d_1, ..., d_m \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\langle\, , \rangle$ das Standard-Skalarprodukt bezeichnet.

Beweisen Sie: Ist eine konvexe Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ in der Vereinigung all dieser Halbräume enthalten, so gibt es bereits $n+1$ Halbräume unter ihnen, deren Vereinigung K umfasst.

Geben Sie auch ein Beispiel an, das zeigt, dass die Behauptung falsch wird, wenn die zuletzt genannte Zahl $n+1$ durch n ersetzt wird.

Hinweis: Es sind nicht nur die abgeschlossenen Halbräume selbst konvex, sondern auch deren Komplemente.

II) Für $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die *Verschiebung* um den Vektor v; das heißt: $\tau_v(x) = x + v$ für $x \in \mathbb{R}^n$.
Es sei $m \geq n+1$, es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, und es seien weitere konvexe Mengen $K_1, ..., K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Ferner gebe es zu je $n+1$ der Mengen $K_1, ..., K_m$ ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\tau_v(K)$ all diese $n+1$ Mengen schneidet.
Zeigen Sie, dass es dann auch ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\tau_{v_0}(K)$ alle Mengen $K_1, ..., K_m$ schneidet.

Hinweis: Für $1 \leq i \leq m$ sind die Mengen $K_i' := K_i - K := \{v - w \,|\, v \in K_i, w \in K\}$ konvex.

III) In $\mathbb{R}^2$ seien endlich viele abgeschlossene Strecken $s_1, ..., s_n$ für ein $n \geq 3$ gegeben, die alle zueinander parallel sind, von denen aber keine zwei eine gemeinsame Trägergerade haben. Ferner gebe es zu je drei dieser Strecken eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die jede dieser drei Strecken schneidet. Zeigen Sie, dass es dann sogar eine Gerade gibt, die alle Strecken $s_1, ..., s_n$ schneidet.

Hinweis: Nach Durchführung einer Drehung kann angenommen werden, dass alle Strecken vertikal sind; die haben dann also die Gestalt

$$s_i = \{(x, y) \,|\, x = u_i, y \in [v_i, w_i]\}$$

für geeignete $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}$ mit $v_i < w_i$.

Betrachten Sie die – konvexen – Mengen

$$K_i := \{(m, c) \in \mathbb{R}^2 \,|\, v_i \leq m u_i + c \leq w_i\} \text{ für } 1 \leq i \leq n,$$

interpretieren Sie die Beziehung $(m, c) \in K_i$ in Bezug auf die Aufgabe, und wenden Sie auf $K_1, ..., K_n$ den Satz von Helly an.

Die Konvexität der Mengen $K_1, ..., K_n$ folgt dabei aus folgender – leicht zu verifizierender – Beobachtung:
Ist $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und K eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, so ist $f^{-1}(K)$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^l$.

Lösungen

I) Wir zeigen zunächst: Für jedes i mit $1 \leq i \leq m$ ist auch das Komplement

$$H_i' := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, v_i \rangle < d_i\}$$

von H_i konvex.

Seien dazu $u, w \in H_i'$, und sei $0 < s < 1$. Dann folgt

$$\langle s \cdot u + (1-s) \cdot w, v_i \rangle = s \cdot \langle u, v_i \rangle \ + \ (1-s) \cdot \langle w, v_i \rangle < s \cdot d_i + (1-s) \cdot d_i = d_i$$

wie gewünscht, weil s und $1-s$ positiv sind.

Mit dem gerade verifizierten Hinweis folgt nun, dass auch alle Mengen $K_i := K \cap H_i'$ konvex sind.

Weil K laut Voraussetzung in der Vereinigung aller Halbräume H_i für $1 \leq i \leq m$ enthalten ist, gibt es zu jedem $v \in K$ ein i mit $v \notin H_i'$. Das bedeutet, dass der Durchschnitt aller Mengen K_i für $1 \leq i \leq m$ leer ist. Nach dem Satz von Helly – genauer nach der Kontraposition – gibt es also Indizes $i_1, ..., i_{n+1}$ mit $1 \leq i_1 < ... < i_{n+1} \leq m$, so dass der Durchschnitt $K_{i_1} \cap ... \cap K_{i_{n+1}}$ leer ist.
Das bedeutet, dass K in der Vereinigung der abgeschlossenen Halbräume $H_{i_1}, ..., H_{i_{n+1}}$ enthalten ist.

Im allgemeinen gibt es – für beliebiges $n \geq 2$ – abgeschlossene Halbräume $H_1, ..., H_{n+1}$, die $\mathbb{R}^n$ überdecken, von denen aber nicht bereits n dieser Halbräume den gesamten $\mathbb{R}^n$ ausschöpfen:

Setze etwa

$$H_i := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\},\ H_{n+1} := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \leq 0\}.$$

Jedes Element, das in keinem H_i für $1 \leq i \leq n$ liegt, weist nur negative Koordinaten auf und liegt daher in H_{n+1}.
Setze andererseits $x_i = n$ für *fixiertes* i mit $1 \leq i \leq n$ und $x_j = -1$ für $1 \leq j \leq n$, aber $j \neq i$. Dann liegt der Punkt $x = (x_1, ..., x_n)$ zwar in H_i, aber in keinem der n abgeschlossenen Halbräume H_j für $1 \leq j \leq n+1$ und $j \neq i$.

II) Angelehnt an den Hinweis zeigen wir zunächst folgendes einfache, aber wichtige

Lemma:
Sind A, B konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, so ist auch $A - B := \{v - w \,|v \in A,\, w \in B\}$ konvex.

Seien dazu $v, v' \in A$, $w, w' \in B$, und $0 < s < 1$.
Zu zeigen ist: $s \cdot (v - w) + (1 - s) \cdot (v' - w') \in A - B$.

Wir erhalten sofort

$$s \cdot (v - w) + (1 - s) \cdot (v' - w') = (s \cdot v + (1 - s) \cdot v') - (s \cdot w + (1 - s) \cdot w') \in A - B,$$

weil A und B konvex sind.

Seien nun $i_1, ..., i_{n+1}$ gegeben mit $1 \leq i_1 < ... < i_{n+1} \leq m$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\tau_v(K)$ alle Mengen $K_{i_1}, ..., K_{i_{n+1}}$ schneidet. Zu jedem j mit $1 \leq j \leq n+1$ existieren daher $u_j \in K$ und $w_j \in K_{i_j}$ mit $v + u_j = w_j$. Das bedeutet:
Alle Mengen $K_{i_j} - K$ enthalten v. Nach dem Satz von Helly enthalten daher alle Mengen $K_i - K$ für $1 \leq i \leq m$ ein Element v_0. Dann schneidet $\tau_{v_0}(K)$ alle Mengen $K_1, ..., K_m$.

III) In Anlehnung an den Hinweis zeigen wir zunächst folgenden

Satz:
Es sei $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Ist dann K eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, so ist $f^{-1}(K)$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^l$.

Seien dazu $v, w \in f^{-1}(K)$ sowie $0 < s < 1$. Zu zeigen ist: $s \cdot v + (1-s) \cdot w \in f^{-1}(K)$.
Nach Voraussetzung gilt: $f(v), f(w) \in K$. Aus der Konvexität von K folgt damit auch:

$$f(s \cdot v + (1-s) \cdot w) = s \cdot f(v) + (1-s) \cdot f(w) \in K$$

wie gewünscht.

Bemerkung:
Analog kann man auch zeigen: Für jede konvexe Teilmenge T von $\mathbb{R}^l$ ist auch $f(T)$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^k$; das wird hier aber nicht gebraucht.

Wir betrachten nun die linearen Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_i(m, c) := mu_i + c$ – für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $K_i = f_i^{-1}([v_i, w_i])$ für alle i; nach dem gerade bewiesenem Satz sind also alle Mengen K_i für $1 \leq i \leq n$ konvex.

Die Beziehung $(m, c) \in K_i$ besagt nun genau:
Die Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ schneidet die – vertikale – Strecke s_i. Laut Voraussetzung der Aufgabe haben daher je drei dieser Mengen K_i einen nichtleeren Durchschnitt. Nach dem Satz von Helly haben also alle Mengen $K_1, ..., K_n$ einen gemeinsamen Punkt (m_0, c_0).
Das bedeutet: Die Gerade mit der Gleichung

$$y = m_0 x + c_0$$

schneidet alle Strecken $s_1, ..., s_n$.