Lösungen zur Probeklausur Lineare Algebra

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(1323, 966)$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

Lösung: Anwendung des euklidischen Algorithmus liefert:

$$
\begin{aligned}
&1323 = 1 \cdot 966 + 357\\
&966 = 2 \cdot 357 + 252\\
&357 = 1 \cdot 252 + 105\\
&252 = 2 \cdot 105 + 42\\
&105 = 2 \cdot 42 + 21\\
&42 = 2 \cdot 21 + 0
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathrm{ggT}(1323, 966) = 21$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$
\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}
$$

Lösung: Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\\
&= 2(4+2) + 2 + 8 + 3(1-8) = 12 + 10 - 21 = 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

Lösung: Wir betrachten die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und ziehen von der 2. Zeile das 2-fache der 1. Zeile sowie von der 3. Zeile das 1/2-fache der 1. Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir von der 3. Zeile das 2-fache der 2. Zeile ab und multiplizieren die 1. Zeile mit 1/2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt ziehen wir von der 1. und der 2. Zeile jeweils die 3. Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -11/2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Schließlich ziehen wir noch von der 1. Zeile die 2. Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11/2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Die rechts stehende 3×3-Matrix ist A^{-1}.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 & -1 & 3x \\ 2x & 1+x & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Lösung: Wir nennen die Matrix $A(x)$. Für ihre Determinante gilt:

$$\begin{aligned} \det(A(x)) &= \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 3x \\ 2x & 1+x & x \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= x^2 \begin{vmatrix} 1+x & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3x \begin{vmatrix} 2x & 1+x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 6x = x(x-6) \end{aligned}$$

Es ist $\det(A(x)) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = 6$ ist. Daher folgt:

$$A(x) \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A(x)) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus sämtliche $x \in \mathbb{R}^4$ mit $Ax = 0$.

Lösung: Wir beginnen mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

und ziehen von der 2. und der 3. Zeile jeweils das 2-fache der 1. Zeile ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann vertauschen wir noch die 2. und die 3. Zeile und erhalten so die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wählt man $x_4 = \alpha$ als freie Variable, so folgt $x_3 = -3\alpha$ und $x_2 = -2x_3 - 3x_4 = 3\alpha$ und schließlich $x_1 = 2x_2 - x_3 - x_4 = 8\alpha$.
Die Lösungsmenge ist also

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 8\alpha \\ 3\alpha \\ -3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch die drei Vektoren

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_2 \\ u_2 &= v_1 - v_3 \\ u_3 &= v_1 + v_2 + v_3 \end{aligned}$$

linear unabhängig sind.

Lösung: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0,$$

also

$$\alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 - v_3) + \gamma(v_1 + v_2 + v_3) = 0.$$

Das kann man umstellen zu

$$(\alpha + \beta + \gamma)v_1 + (\alpha + \gamma)v_2 + (\gamma - \beta)v_3 = 0.$$

Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, folgt daraus:

$$\begin{aligned} 1) &\quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2) &\quad \alpha + \gamma = 0 \\ 3) &\quad \gamma - \beta = 0 \end{aligned}$$

Aus 1) und 2) folgt sofort $\beta = 0$ und damit folgt aus 3) auch $\gamma = 0$. Aus 2) folgt dann auch $\alpha = 0$. Also sind u_1, u_2, u_3 linear unabhängig.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$.
Zeigen Sie, dass dann auch $W = F[U_1] \oplus F[U_2]$ gilt.

Lösung:
1) Sei $w \in W$ beliebig. Da F surjektiv ist, existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = w$. Wegen $V = U_1 \oplus U_2$ existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$. Es folgt

$$w = F(v) = F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$$

und es gilt $F(u_1) \in F[U_1]$ und $F(u_2) \in F[U_2]$.Also ist $w \in F[U_1] + F[U_2]$.
Da $w \in W$ beliebig war, folgt $W = F[U_1] + F[U_2]$.
2) Sei $w \in F[U_1] \cap F[U_2]$. Dann existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $F(u_1) = w = F(u_2)$. Da F injektiv ist, folgt $u_1 = u_2$. Daher gilt $u_1 \in U_1 \cap U_2$. Laut Voraussetzung gilt aber $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, also ist $u_1 = 0$ und somit $w = F(u_1) = 0$.
Damit ist auch $F[U_1] \cap F[U_2] = \{0\}$ gezeigt und somit gilt $W = F[U_1] \oplus F[U_2]$.