12. Übungsblatt zu "Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 1.7.2021

45.) Es sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Ferner sei für festes $c \in \mathbb{R}$ die – differenzierbare – *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L} : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \lambda) := f(x_1, ..., x_n) - \lambda \cdot (g(x_1, ..., x_n) - c).$$

Zeigen Sie für $(x_1, ..., x_n, \lambda) \in D \times \mathbb{R}$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(I) $\triangledown f(x_1, ..., x_n) = \lambda \cdot \triangledown g(x_1, ..., x_n)$ und $g(x_1, ..., x_n) = c$.

(II) $\triangledown \mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \lambda) = 0$.

46.) Minimieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) := 2x^2 - 12x + y^2 - 8y$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x + y = 2$.

47.) Aus einem Material soll ein Quader mit der Oberfläche $150\,cm^2$ so konstruiert werden, dass sein Volumen so groß wie möglich ist. Bestimmen Sie die drei Seitenlängen x, y, z dieses Quaders und das Volumen.

48.) Wir betrachten für fixiertes $n \geq 2$ die abgeschlossene Menge

$$A := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \,\text{für}\, 1 \leq i \leq n\}.$$

Definiere $f : A \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, ..., x_n) := \left(\tfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^n - x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n.$$

i) Zeigen Sie: $f(\lambda \cdot x) = \lambda^n \cdot f(x)$ für alle $x = (x_1, ..., x_n) \in A$ und alle $\lambda > 0$.

ii) Bestimmen Sie das globale Minimum von f – auf A – unter der Nebenbedingung $x_1 + ... + x_n = n$, und zeigen Sie auf diese Weise – zusammen mit i):

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in A.$$

Dabei sind die Funktionswerte in den Randpunkten von A auch zu berücksichtigen, aber leicht zu analysieren.

iii) Zeigen Sie mittels ii), dass für alle positiven reellen Zahlen $a_1, ..., a_n$ gilt:

$$\tfrac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Das bedeutet: Das *arithmetische Mittel* von n positiven reellen Zahlen ist stets mindestens so groß wie das *geometrische Mittel*.