3. Übungsblatt zu “Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 29.4.2021

Eine Basis $\{v_1, ..., v_d\}$ von $\mathbb{R}^d$ heißt eine *Orthogonalbasis*, falls für alle $i, j$ mit $1 \leq i < j \leq d$ gilt: $v_i \bullet v_j = 0$.
Gilt *zusätzlich* $v_i \bullet v_i = 1$ für alle $i$ mit $1 \leq i \leq d$, so heißt diese Basis eine *Orthonormalbasis* von $\mathbb{R}^d$.

9.) Zeigen Sie: Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ irgendeine Basis von $\mathbb{R}^3$, so ist eine Orthogonalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$u_1 := v_1,$

$u_2 := v_2 - \frac{u_1 \bullet v_2}{u_1 \bullet u_1} \cdot u_1,$

$u_3 := v_3 - \frac{u_1 \bullet v_3}{u_1 \bullet u_1} \cdot u_1 - \frac{u_2 \bullet v_3}{u_2 \bullet u_2} \cdot u_2.$

10.) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass die Vektoren $v_1, v_2$ die homogene Ebene

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x - 4y = 0\}$$

aufspannen.

11i) Es seien $v, w$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$, die beide vom Nullvektor verschieden sind, und $\angle(v, w)$ bezeichne den Winkel zwischen den beiden Vektoren $v$ und $w$. Zeigen Sie:

$$v \bullet w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot cos(\angle(v, w)).$$

ii) Beweisen Sie den *Cosinussatz:*
Hat ein Dreieck die Seitenlängen $a, b, c$, und schließen die Seiten $a$ und $b$ den Winkel $\gamma$ ein, so gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma).$$

*Hinweise:*

i) Überlegen Sie sich zunächst, dass der allgemeine Fall auf den Fall $0° < \angle(v, w) < 90°$ zurückgeführt werden kann. Schreiben Sie dann $w$ in der Gestalt $w = u + \lambda \cdot v$, wobei der Vektor $u$ auf $v$ senkrecht steht.

ii) Das Dreieck habe die Eckpunkte $A, B, C$, wobei wir annehmen können, dass der Punkt $C$ der Koordinatenursprung ist. Berechnen Sie dann das Skalarprodukt $(B-A) \bullet (B-A)$ auf zwei verschiedene Weisen, wobei einmal Teil i) zu verwenden ist.

12.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in $\mathbb{R}^4$:

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 0 \quad \wedge \quad x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0.$$