Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 6.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

17. bis 21. Mai 2021

Zusammenfassung der 6.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 6.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein.
Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um lineare Unabhängigkeit, Basen von Vektorräumen und den Dimensionsbegriff. Das ist **Abschnitt IV.3 im Skript**.

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren aus V. Dann heißt $(v_1, \ldots, v_n)$ **linear unabhängig**, falls folgendes gilt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Anderenfalls heißt $(v_1, \ldots, v_n)$ **linear abhängig**.

Beispiele:
1) Ein einzelner Vektor $v \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ gilt.
2) $(e_1, \ldots, e_n)$ ist linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

Beispiele (Fortsetzung):
3) Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^2$.
4) Die Vektoren

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind dagegen linear abhängig.

Beispiele (Fortsetzung):
5) Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, denn $3v_1 - v_2 - v_3 = 0$.
6) Die Vektoren

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^3$ (Beweis im Skript).

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $A \subseteq V$. Dann heißt A **linear unabhängig**, falls für alle paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $(a_1, \ldots, a_n)$ ist linear unabhängig.
Anderenfalls heißt A **linear abhängig**.

Beispiele:
1) $\emptyset$ ist linear unabhängig.
2) Sind $a_1, \ldots, a_n \in V$ paarweise verschieden, so ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linear unabhängig genau dann, wenn $(a_1, \ldots, a_n)$ linear unabhängig ist.
3) Bezeichnet p_n die n-te Potenzfunktion (d. h. $p_n(x) = x^n$), so ist die Menge $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig im Vektorraum $V_\mathbb{R}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $B \subseteq V$. Dann heißt B eine **Basis** von V, falls B sowohl linear unabhängig als auch ein Erzeugendensystem von V ist.

Beispiele:

1) Die leere $\emptyset$ ist eine Basis des Nullraumes $\{0\}$.

2) Die Menge $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die sogenannte **kanonische Basis**.

3) Die Menge

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Beispiele (Fortsetzung):
4) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\{p_0, \dots, p_n\}$ eine Basis des Vektorraums aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.
5) Die Menge $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Basis des Vektorraums aller Polynomfunktionen.

Satz: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $B \subseteq V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) B ist eine Basis von V.
2) B ist **maximal linear unabhängig**, d. h. B ist linear unabhängig und ist $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge mit $B \subseteq A$, so folgt $B = A$.
3) B ist ein **minimales Erzeugendensystem** von V, d. h. B ist ein Erzeugendensystem von V und ist A ein Erzeugendensystem von V mit $A \subseteq B$, so folgt $A = B$.

Beweis: Siehe Satz IV.3.4. im Skript.

Lemma (Austauschlemma von Steinitz)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei B eine Basis von V. Sei $v \in V$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $b_1, \dots, b_n \in B$ paarweise verschieden mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.
Ist $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j \neq 0$, so ist $(B \setminus \{b_j\}) \cup \{v\}$ wieder eine Basis von V.

Austauschsatz von Steinitz: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei B eine Basis von V und sei A eine endliche, linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $C \subseteq B$, die genauso viele Elemente wie A hat, so dass $(B \setminus C) \cup A$ wieder eine Basis von V ist.

Beweise: Siehe Lemma IV.3.5. und Satz IV.3.6. im Skript.

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Basisergänzungssatz: Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Sei $A \subseteq V$ linear unabhängig. Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B$.

Basisauswahlsatz: Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Sei $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V. Dann existiert eine Basis B von V mit $B \subseteq E$.

Daraus folgt insbesondere:

Basisexistenzsatz: Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Dann besitzt V eine Basis.

Diese Sätze wollen wir nicht in voller Allgemeinheit beweisen. Wir beschränken uns im Folgenden auf Vektorräume, welche ein endliches Erzeugendensystem besitzen.

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Satz: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) V hat ein endliches Erzeugendensystem.
(b) Für alle Erzeugendensysteme E von V gilt:
Es existiert eine endliche Teilmenge $E' \subseteq E$, so dass E' immer noch ein Erzeugendensystem von V ist.
(c) Für alle Erzeugendensysteme E von V gilt: Es existiert eine endliche Basis B von V mit $B \subseteq E$.

Beweis: Siehe Satz IV.3.10. im Skript.

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Satz: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei $A \subseteq V$ linear unabhängig und sei $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V. Ist E endlich, so ist auch A endlich und hat höchstens so viele Elemente wie E.

Beweis: Siehe Satz IV.3.11. im Skript.

Korollar: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, welcher ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Dann gilt:
1) V besitzt eine endliche Basis.
2) Jede Basis von V ist endlich und je zwei Basen von V haben die gleiche Anzahl von Elementen.

Beweis: Siehe Korollar IV.3.12. im Skript.

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Besitzt V ein endliches Erzeugendensystem, so bezeichne mit $\dim(V)$ die Anzahl der Elemente in einer Basis von V. Anderenfalls setze $\dim(V) := \infty$. $\dim(V)$ heißt die **Dimension** von V.

Beispiele:
1) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (denn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$).
2) Der Vektorraum P_n aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ hat $\{p_0, \ldots, p_n\}$ als eine Basis, also ist $\dim(P_n) = n + 1$.
3) Der Vektorraum P aller Polynomfunktionen ist dagegen unendlich-dimensional, denn er hat z. B. $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ als Basis.

Lemma

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) $\dim(V) = \infty$
2) Es gibt eine unendliche Folge $v_1, v_2, \ldots$ von Vektoren in V, deren Anfangsstücke $(v_1, \ldots, v_n)$ jeweils linear unabhängig sind (für alle $n \in \mathbb{N}$).

Korollar: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim(V) < \infty$ und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist auch $\dim(U) < \infty$.

Beweise: Siehe Lemma IV.3.14. und Korollar IV.3.15. im Skript.

Basisergänzungssatz für endlich erzeugte Vektorräume:
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim(V) < \infty$ und sei $A \subseteq V$ linear unabhängig. Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B$.

Korollar: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$.
Ist ferner $\dim(V) < \infty$, so gilt $U = V \;\Leftrightarrow\; \dim(U) = \dim(V)$.

Beweise: Siehe Satz IV.3.16. und Korollar IV.3.17. im Skript.

Lemma

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume mit $V = U_1 \oplus U_2$. Dann gilt $\dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

Beweis: Siehe Lemma IV.3.18. im Skript.