Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 3.6.2021

Ergänzungen und Beispiele zum Kapitel 1.8 – Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Wir möchten zunächst alle Eigenwerte und Eigenvektoren einer gegebenen oberen Dreiecksmatrix berechnen, nämlich der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung des charakteristischen Polynoms einer Dreiecksmatrix ist einfach, weil die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen ist. Wir erhalten für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$P_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda).$$

$P_A(\lambda)$ hat also die Nullstellen $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 3$; das sind auch die Eigenwerte von A.

Zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ ist folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Äquivalenzumformung liefert:

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 4x_1 \;\wedge\; 4x_2 + x_3 = 4x_2 \;\wedge\; 3x_3 = 4x_3 \\ \Leftrightarrow x_3 = 0 \;\wedge\; 4x_1 + x_2 = 4x_1 \\ \Leftrightarrow x_2 = x_3 = 0 \end{gathered}$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ sind also genau die Vektoren der Gestalt $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Eigenraum U_4 zum Eigenwert 4 ist also

$$U_4 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ ist folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$4x_1 + x_2 - 5x_3 = 3x_1 \;\wedge\; 4x_2 + x_3 = 3x_2 \;\wedge\; 3x_3 = 3x_3$$

Hier ist die letzte Gleichung – als Tautologie – redundant. Daher liefert Äquivalenzumformung des letzten linearen Gleichungssystems:

$$x_2 = -x_3 \;\wedge\; x_1 = 6x_3$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ sind also genau die Vektoren der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 6x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum U_3 zum Eigenwert 3 ist also

$$U_3 = \{ \begin{pmatrix} 6x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \}.$$

Wir möchten ferner Eigenwerte und Eigenvektoren zu gewissen 2×2- Matrizen berechnen, die in der Geometrie sehr wichtig sind. Genauer betrachten wir für fixiertes $\alpha \in [0, 2\pi[$ die Matrizen

$$D = D_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad S = S_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Wie wir sehen werden, beschreibt D eine *Drehung* – um den Winkel α – und S eine Spiegelung an einer homogenen Geraden.

Wir untersuchen zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_D(\lambda)$ der Matrix D. Es ergibt sich:

$$P_D(\lambda) = det\begin{pmatrix} cos(\alpha) - \lambda & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = (cos(\alpha) - \lambda)^2 + sin^2(\alpha).$$

Ohne weiter zu rechnen, sehen wir schon: Hier steht eine Summe von zwei Quadraten. Die kann nur dann 0 sein, wenn beide Summanden den Wert 0 haben.
Die Matrix D kann also nur dann (mindestens) einen Eigenwert haben, wenn gilt: $sin(\alpha) = 0$ – und damit $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$.

In diesen beiden Fällen erhalten wir die beiden Matrizen $D_0 = E_2$ und $D_\pi = -E_2$ – also die Einheitsmatrix E_2 oder die zugehörige additiv inverse Matrix.
Trivialerweise hat die Einheitsmatrix nur den Eigenwert 1; dabei ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor.
Die negative Einheitsmatrix $-E_2$ hat nur den Eigenwert -1; da ist ebenfalls jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor.

Anschaulich ist klar: D_0 beschreibt – als Identität – die Drehung um den Nullwinkel, D_π beschreibt die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel 180°, der im Bogenmaß der Zahl π entspricht. Das ist übrigens auch die Punktspiegelung am Koordinatenursprung.

Wir wollen uns nun noch überlegen, dass D_α immer die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel α – entgegen dem Uhrzeigersinn – beschreibt:

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet: Beide Standard-Einheitsvektoren werden bei Multiplikation mit der Matrix D_α im mathematisch positiven Sinn um den Nullpunkt um den Winkel α (im Bogenmaß) gedreht. – Jede Drehung um den Nullpunkt ist eine lineare Abbildung. Weil jede lineare Abbildung schon eindeutig durch die Bilder der Standard-Einheitsvektoren festgelegt ist, folgt: Die lineare Abbildung, die durch die Matrix D_α beschrieben wird, ist die Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel α – entgegen dem Uhrzeigersinn.
Klar ist auch – wie oben schon festgestellt wurde – dass solch eine Drehung nur dann Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen kann, wenn um den Winkel 0° oder um den Winkel 180° gedreht wird.

Nun wenden wir uns der Matrix S zu. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P_S(\lambda) = det\begin{pmatrix} cos(\alpha)-\lambda & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)-\lambda \end{pmatrix} = (cos(\alpha)-\lambda)\cdot(-cos(\alpha)-\lambda) - sin^2(\alpha)$$
$$= \lambda^2 - cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)\cdot(\lambda+1).$$

Die Nullstellen sind also 1 und -1; das sind somit auch die Eigenwerte von S – und zwar unabhängig von α.

Interessant wird nun die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren. Dazu überlegen wir uns zunächst folgendes: Kennt man alle Eigenvektoren der Länge 1, so kennt man auch alle Eigenvektoren überhaupt: Ist nämlich v irgendein Eigenvektor und $r \in \mathbb{R}$, so ist auch $r \cdot v$ ein Eigenvektor – zum gleichen Eigenwert.

Ist v ein Vektor der Länge 1, so hat er die Gestalt $v = \begin{pmatrix} cos(\beta) \\ sin(\beta) \end{pmatrix}$ für ein $\beta \in [0, 2\pi[$. Um zu testen, wann solch ein Vektor Eigenvektor von der Matrix S zum Eigenwert 1 ist, haben wir folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(\beta) \\ sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\beta) \\ sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

Äquivalenzumformung liefert:

$$cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin(\alpha)\cdot sin(\beta) = cos(\beta) \ \wedge \ sin(\alpha)\cdot cos(\beta) - cos(\alpha)\cdot sin(\beta) = sin(\beta).$$

Die Additionstheoreme auf Seite 114, Ende des Kapitels 3.1 zur Vorlesung “Mathematik I” ergeben folgende weitere Äquivalenzumformung:

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\beta) \ \wedge \ sin(\alpha-\beta) = sin(\beta).$$

Aufgrund der Periodizitätseigenschaften der Funktionen cos und sin – und der Voraussetzungen $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ – ist das nur möglich, wenn entweder $\alpha - \beta = \beta$ oder $\alpha - \beta + 2\pi = \beta$ ist.
Das bedeutet: $\beta = \frac{1}{2}\cdot\alpha$ oder $\beta = \frac{1}{2}\cdot\alpha + \pi$.
In jedem Fall erhält man folgenden Eigenraum zum Eigenwert 1:

$$U_1 = \{r \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha/2) \\ sin(\alpha/2) \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Ähnlich kann man zeigen, dass der Eigenraum U_{-1} zum Eigenwert -1 gegeben ist durch

$$U_{-1} = {U_1}^{\perp} = \{r \cdot \begin{pmatrix} sin(\alpha/2) \\ -cos(\alpha/2) \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Die Beziehung $U_{-1} = {U_1}^{\perp}$ folgt nun aber auch direkter mittels folgender Überlegung:
Für einen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich folgende Kette von Äquivalenzumformungen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor der Matrix } \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert 1}$$
$$\Leftrightarrow a\cdot cos(\alpha) + b\cdot sin(\alpha) = a \ \wedge \ a\cdot sin(\alpha) - b\cdot cos(\alpha) = b$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor der Matrix } \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -1.$$

(Zu einer Verallgemeinerung siehe auch Aufgabe 28.)

Wir möchten nun die durch die Matrix S induzierte lineare Abbildung geometrisch noch genauer beschreiben. Die bisherigen Überlegungen zeigen:
Ist $v \in U_1$ und $w \in {U_1}^{\perp}$, so gilt stets:

$$S\cdot(v+w) = v - w.$$

Das bedeutet: Die durch S induzierte lineare Abbildung ist die Spiegelung an der – homogenen – Geraden U_1.