Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar Kombinatorische Geometrie

Leipzig, den 13.7.2021

Kommentare und Ergänzungen zum Beweis des Satzes von Monsky

Markant an dem Beweis des Satzes von Monsky, nach dem ein Quadrat nicht in eine **ungerade** Anzahl von Dreiecken gleichen Flächeninhalts zerlegt werden kann, ist die Ausnutzung der Bewertungstheorie, die auf den ersten Blick gar keinen direkten Bezug zu der klassischen Euklidischen Geometrie zu haben scheint.
Genauer wird in Monskys Beweis von einer Fortsetzung der gewöhnlichen – auf $\mathbb{Q}$ definierten – 2-adischen Bewertung $|\,|_2$ auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen Gebrauch gemacht.
Dabei geht es *nicht* um die übliche Vervollständigung eines Metrischen Raumes M, um diesen zu einem Metrischen Raum zu erweitern, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert; auf die Weise würde man nämlich den sogenannten *Körper* $\mathbb{Q}_2$ *der* 2*-adischen Zahlen* – statt $\mathbb{R}$ – erhalten; um diese 2-adischen Zahlen wird es hier aber nicht gehen.

Aufgrund der grundsätzlichen Bedeutung wiederholen wir zunächst die

Definition einer nicht-archimedischen – reellen – Bewertung:
Es sei K ein – kommutativer – Körper. Eine *nicht-archimedische Bewertung* ist eine Abbildung $v : K \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $v(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

(ii) $v(x \cdot y) = v(x) \cdot v(y)$ für alle $x, y \in K$,

(iii) $v(x + y) \leq max\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in K$.

Unser wichtigstes Beispiel ist wie folgt:

Beispiel der p-adischen Bewertung für eine Primzahl p:

Definiere $v_p = |\,|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ durch:

$$v_p(0) := 0,\;\; v_p(p^k \cdot \tfrac{a}{b}) := p^{-k} \text{ für } k \in \mathbb{Z},\; a, b \in \mathbb{Z} \setminus p \cdot \mathbb{Z}.$$

Bemerkung:
Ist $v : K \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ eine nicht-archimedische Bewertung, so wird in kanonischer Weise eine zugehörige Metrik $d : K \times K \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definiert durch $d(x, y) := v(x - y)$.
Um diese Metrik wird es nun aber nicht gehen.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist gegeben durch die

Definition des Bewertungsrings:
Ist $v : K \to \mathbb{R}$ eine beliebige nicht-archimedische Bewertung, so ist der zugehörige **Bewertungsring** definiert durch:

$$R := \{x \in K \,|\, v(x) \leq 1\}.$$

Klar ist: Für jedes $x \in K$ ist $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$, weil im Falle $x \neq 0$ gilt: $v(x) \cdot v(x^{-1}) = 1$.
Dabei ist das “oder” nicht ausschließend: Ist $x \in R^*$; das heißt, ist x in R multiplikativ invertierbar, so enthält R natürlich – definitionsgemäß – beide Elemente x und x^{-1}.

Schreiben wir $R^{-1} := \{x^{-1} \,|\, x \in R\backslash\{0\}\}$, so folgt also für jeden Bewertungsring: $K = R \cup R^{-1}$.

In [0] wird – mittels des Zornschen Lemmas – bewiesen, dass jeder maximale Unterring R von $\mathbb{R}$, der $\frac{1}{2}$ nicht enthält, ein Bewertungsring ist – in dem Sinne, dass $\mathbb{R} = R \cup R^{-1}$ ist.
Damit folgt aber noch nicht direkt, dass es wirklich eine nicht-archimedische Bewertung v mit zugehörigem Bewertungsring R gibt. – Das wird in [0] ausgeführt; die Werte liegen dabei aber nicht unbedingt in $\mathbb{R}$, sondern es wird wie folgt verfahren:

Auf der Menge der Restklassen in der Faktorgruppe $G := K^*/R^*$ wird durch folgende Vorschrift eine vollständige Ordnung eingeführt:

$$xR^* \leq yR^* :\Leftrightarrow xR \subseteq yR.$$

Wie in [0] korrekt ausgeführt wird, ist es für Monskys Beweis nicht notwendig, Additionen der Werte unter der Bewertung v durchzuführen. Dennoch möchten wir anmerken, dass G wie folgt in einen angeordneten Körper eingebettet werden kann:

Wir betrachten zunächst den *Gruppenring* $\mathbb{Z}(G)$, der aus allen formalen Summen der Gestalt

$$S = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i \text{ für } k_i \in \mathbb{Z} \text{ und } g_i \in G$$

besteht. Dabei reicht es natürlich, solche Summen mit paarweise verschiedenen Elementen $g_1, ..., g_n \in G$ zu betrachten.
Nach Umordnung und Streichung überflüssiger Produkte können wir weiter annehmen: $g_1 > g_2 > ... > g_n$. Dann legen wir fest:

$$S > 0, \text{ falls } k_1 > 0 \text{ ist.}$$

Die Elemente in $\mathbb{Z}(G)$ werden natürlich distributiv miteinander multipliziert.

G ist eine *linear geordnete Gruppe*; das heißt, sind $g_0, g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 < g_2$, so ist auch $g_0 \cdot g_1 < g_0 \cdot g_2$.
Daraus folgt, dass der Gruppenring $\mathbb{Z}(G)$ ein Integritätsring ist, zu dem wir daher den Quotientenkörper $Q := Quot(\mathbb{Z}(G))$ betrachten können. In kanonischer Weise ist dabei $G \cup \{0\} \subseteq Q$. Die Abbildung $v : K \to G \cup \{0\}$, definiert durch

$$v(0) := 0,\ v(x) := x \cdot R^*$$

kann somit auch als eine Bewertung von K mit Werten in dem Körper Q aufgefasst werden.

Durch die Vorschrift

$$v_0(\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i) := g_1 \text{, falls } g_1 > g_i \text{ für alle } i > 1 \text{ und } k_1 \neq 0$$

erhalten wir weiter eine eindeutig bestimmte und wohldefinierte nicht-archimedische Bewertung $v_0 : Q \to Q$ mit $v_0(Q) = G \cup \{0\}$ und $v_0 \circ v_0 = v_0$ und damit auch $v_0 \circ v = v$.

Alternativ kann $|\,|_2$ aber auch wie folgt zu einer Bewertung $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden:

Es sei L derjenige Zwischenkörper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, der alle über $\mathbb{Q}$ – reellen – algebraischen Zahlen enthält, also solche, die Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind.

Aus der Theorie der *Dedekind-Ringe* folgt zunächst:
Ist L' irgendein Körper mit $\mathbb{Q} \subseteq L' \subseteq L$, der über $\mathbb{Q}$ endlichen Grad hat, so läßt sich v_2 zu einer Bewertung auf L' fortsetzen – mit Werten in $\mathbb{R}$. Mit dem Zornschen Lemma folgt dann weiter, dass v_2 sogar auf L fortgesetzt werden kann.

Für die rein transzendente Körpererweiterung $\mathbb{R} : L$ betrachten wir eine *Transzendenz-Basis* B, die aus Elementen $e_i, i \in I$, bestehe. Dann kann die bereits auf L definierte Bewertung eindeutig zu einer auf $\mathbb{R}$ definierten nicht-archimedischen Bewertung fortgesetzt werden, indem wir etwa noch fordern

$$w(e_i) := \tfrac{1}{e_i} \text{ für alle } i \in I\ .$$

Aus dieser Vorschrift und der algebraischen Unabhängigkeit der Elemente $e_i, i \in I$, folgt, dass in jedem nicht-konstantem Polynom P in n Variablen alle Summanden verschiedene Werte unter w annehmen, wenn n – paarweise verschiedene – Elemente der Transzendenz-Basis B in P eingesetzt werden.

Literatur:

[0] Ein Quadrat und viele Dreiecke, Seite 151 –159,
im “Buch der Beweise” von Martin Aigner und Günter Ziegler,
Springer Verlag, Dritte Auflage 2009.