9. Diese Gleichung (16) ist nun von derselben Gestalt wie die Ausgangsgleichung (8). Wir sehen also: Wenn es eine Grundlösung x, y, w von (8) gibt, so gibt es auch eine weitere Grundlösung x_1, y_1, w_1 von (8), wobei wir x_1, y_1, w_1 durch einen gewissen Prozeß aus x, y, w herleiten konnten. Nun ist aber jedenfalls das w der ersten Lösung größer als das w_1 der zweiten, denn nach (10c) und der ersten Gleichung (13) ist

$$w = u^2 + v^2 = w_1^4 + v^2 > w_1^4,$$

also gewiß $w > w_1$.

Aus diesen Tatsachen läßt sich nun leicht ein Widerspruch herleiten. Denn genau, wie wir in 8. aus x, y, w die neue Lösung x_1, y_1, w_1 gewonnen haben, können wir aus x_1, y_1, w_1 durch Anwendung des gleichen Prozesses eine Lösung x_2, y_2, w_2 erhalten, welche die zu $w > w_1$ analoge Eigenschaft $w_1 > w_2$ besitzt. Eine abermalige Anwendung des Prozesses gibt dann eine Lösung x_3, y_3, w_3 mit $w_2 > w_3$. Wir erhalten so durch Fortsetzung dieses Verfahrens eine absteigende Folge von Zahlen

$$w > w_1 > w_2 > w_3 > \dots, \tag{17}$$

Diese Zahlen sollen aber sämtlich positive ganze Zahlen sein, von denen es unterhalb von w gewiß nur endlich viele gibt, so daß also in der Folge (17) eine letzte, etwa w_k, auftreten müßte. Aber auch diese müßte zu einer Lösung x_k, y_k, w_k gehören, aus der man nach 8. abermals eine Lösung $x_{k+1}, y_{k+1}, w_{k+1}$ mit $w_k > w_{k+1}$ herstellen könnte, womit wir den Widerspruch erhalten haben. Damit ist festgestellt, daß es eine Lösung von (8) nicht geben kann, da die Annahme einer solchen auf einen Widerspruch geführt hat.

Den Grundgedanken dieses Beweises pflegt man mit FERMAT als „descente infinie" zu bezeichnen. Er besteht in der Absurdität, daß ein gewisser Prozeß (hier die Wiederholung des Verfahrens von 8.) eine *unbegrenzte* Folge immer kleinerer ganzer positiver Zahlen liefert, während doch eine abnehmende Folge positiver ganzer Zahlen nur *endlich* sein kann, da unterhalb jeder positiven ganzen Zahl n nur endlich viele weitere liegen können, nämlich höchstens die Zahlen $n-1, n-2, \dots 3, 2, 1$, also höchstens $(n-1)$ Zahlen.

Auf eine solche descente infinie kam im Grunde auch schon der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ heraus (Kap. 4).

14. Der Pferchkreis eines Punkthaufens.

1. Es seien in der Ebene n Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ gegeben. Ihre Gesamtheit wollen wir als „Punkthaufen" bezeichnen[1]. Wir betrachten nun alle möglichen Entfernungen zwischen irgend zwei Punkten P_i und P_k

[1] Wir brauchen absichtlich nicht das Wort „Punktmenge", da dieses auch für Gesamtheiten von unendlich vielen Punkten gebraucht wird. Ein Punkthaufen soll nach unserer Bezeichnungsweise nur endlich viele Punkte enthalten.

des Punkthaufens. Unter diesen endlich vielen[1] Distanzen muß es eine größte geben. Wir wollen sie hervorheben und die „Spannung" des aus den n Punkten bestehenden Punkthaufens nennen.

Um n Punkte von der Spannung d kann man gewiß einen Kreis vom Radius d herumlegen, der alle n Punkte enthält (Fig. 56). Man braucht nur einen Kreis vom Radius d um einen beliebigen der n Punkte, etwa um P_1 zu schlagen. Da jeder andere der n Punkte von P_1 höchstens den Abstand d hat, so umfaßt dieser Kreis außer seinem Mittelpunkt P_1 auch sämtliche anderen Punkte $P_2, P_3, \ldots, P_n$.

Man kann aber leicht einen noch kleineren Kreis konstruieren, der sämtliche n Punkte umfaßt. Man suche sich nämlich das Punktpaar mit der größten Entfernung, die ja d ist, aus. (Gibt es mehrere solche Punktpaare vom Abstand d, so wähle man ein beliebiges von diesen.) Um jeden der beiden Punkte dieses Paares — es heiße $P_1\,P_2$ — schlage man den Kreis vom Radius d, der offenbar durch den anderen Punkt des Paares geht. Nun liegen die n Punkte, wie wir schon wissen, einerseits alle in dem Kreise um P_1, anderseits aber auch alle in dem Kreise um P_2. Also müssen sämtliche n Punkte auch in dem den beiden gemeinsamen Flächenstück, einem Kreisbogenzweieck, liegen, das in der Fig. 56 schraffiert ist. Dieses Kreisbogenzweieck mit den Ecken S_1 und S_2 läßt sich nun seinerseits von einem Kreise umgeben, der $S_1\,S_2$ zum Durchmesser hat. Für seinen Radius r ergibt sich nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck $P_1\,M\,S_1$:

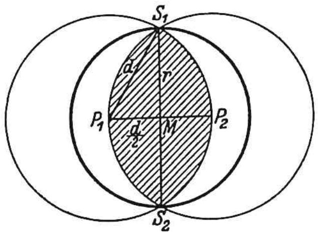

Fig. 56.

$$r^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\,d^2,$$

also $r = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Einen Kreis, der sämtliche n Punkte des Haufens H in seinem Innern oder auf seiner Peripherie enthält, wollen wir einen „Umfassungskreis" des Punkthaufens nennen. Statt des zuerst genannten Umfassungskreises vom Radius $r = d$ haben wir also einen Umfassungskreis vom Radius $r = \frac{d}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ldots d$ angegeben.

2. Hier taucht nun die Frage auf, ob man diese Zahl $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ erneut durch eine noch niedrigere ersetzen kann. Auf diese Frage antwortet der folgende Satz von H. W. E. JUNG: Zu jedem Punkthaufen von der Spannung d gibt es stets einen Umfassungskreis, der höchstens den Radius

[1] Man überlegt sich leicht, daß bei n Punkten $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Möglichkeiten zur Bildung von Paaren bestehen.

$\frac{d}{3}\sqrt{3} = 0{,}577\ldots d$ hat. Bei manchen Punkthaufen kann der Radius des Umfassungskreises noch weiter verkleinert werden[1]. Es gibt aber Punkthaufen, bei denen ein kleinerer Radius nicht erreicht werden kann. Der Beweis des Jungschen Satzes soll das Ziel dieses Kapitels sein.

Für den Punkthaufen, der aus den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge d besteht, können wir leicht einen Umfassungskreis angeben, der das Jungsche Maß $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ besitzt. Es ist dies einfach der Umkreis des gleichseitigen Dreiecks. Denn $r + x = h$ gesetzt (s. Fig. 57), ist in dem rechtwinkligen Dreieck $A\,B\,D$:

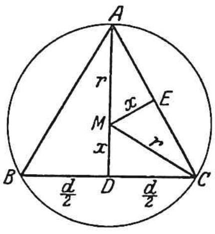

Fig. 57.

$$d^2 = h^2 + \frac{d^2}{4},$$

(1) $$h^2 = \frac{3d^2}{4},$$

also

(2) $$h = \frac{d}{2}\sqrt{3}.$$

Ferner gilt in dem Dreieck $D\,C\,M$

$$x^2 + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

also

$$(h-r)^2 + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

$$h^2 - 2hr + r^2 + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

$$h^2 + \frac{d^2}{4} = 2hr$$

und wegen (1)

$$d^2 = 2hr,$$

$$r = \frac{d^2}{2h},$$

woraus sich nach (2)

$$r = \frac{d^2}{d\sqrt{3}} = \frac{d}{3}\sqrt{3}$$

ergibt, wie behauptet.

Für ein gleichseitiges Dreieck ist es übrigens evident, daß der Umkreis zugleich auch der kleinste Umfassungskreis ist. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen, da sich diese Tatsache nachher von selbst mit ergeben wird.

---

[1] Da zwei Punkte von der Entfernung d nur in einem Kreise, dessen Radius mindestens $\frac{d}{2}$ ist, Platz haben, und ein Punkthaufen der Spannung d stets ein Punktpaar der Entfernung d enthält, so kann ein Umfassungskreis nie einen kleineren Durchmesser als $\frac{d}{2}$ aufweisen.

3. Um nun den Jungschen Sat
der Spannung d zu beweisen, wei
Umfassungskreisen des Punktha
finden. Zu diesem Zwecke wend
die zu fortschreitender Verkleine
sollen:

I. Ein Umfassungskreis K_1, au
liegt, kann durch einen kleiner
nämlich nur um den Mittelpunl
weitesten entfernten Punkt des
Dieser verläuft ganz in K_1, da
herausgegriffenen auf K_2 liegend
auch Umfassungskreis von H.

II. Ein Umfassungskreis K_3,
haufens H liegt, läßt sich verkleir
auf K_3, so zeichnen wir alle Krei
mit K_3 die gemeinsame Tangente
auf denen noch ein weiterer P
liegt. Diese Kreise liegen sämtlic
von K_3. Der größte von ihnen K_4
verschieden sein muß, da auf K_3
K_4 aber außer P_1 noch ein weitere
H liegt) umfaßt alle anderen und
alle Punkte von H und enthält
Punkte auf der Peripherie. Er ist k

III. Die Punkte von H, di
teilen ihn in Kreisbogen ein, c
sind. Unter einem „punktfreier
kurz einen Kreisbogen versteh
die Endpunkte eines punktfre
H sein.

In dieser Sprechweise behau
der einen punktfreien Bogen v
läßt sich durch einen kleineren

In der Tat, es seien auf K_5 c
den Endpunkte des punktfreien
(s. Fig. 59). Über $P_1 P_2$ als Durc
Enthält er alle Punkte von H, s
kreis als K_5, denn K_5, in dem
darstellt (da b kein Halbkreis se
jedoch K^* nicht alle Punkte v

---

[1] Die Fälle I und II können übri
denn in jenen beiden Fällen ist sog

3. Um nun den Jungschen Satz allgemein für beliebige Punkthaufen der Spannung d zu beweisen, werden wir darauf ausgehen, unter allen Umfassungskreisen des Punkthaufens einen möglichst kleinen aufzufinden. Zu diesem Zwecke wenden wir eine Reihe von Prozessen an, die zu fortschreitender Verkleinerung eines Umfassungskreises dienen sollen:

I. Ein Umfassungskreis K_1, auf dem kein Punkt des Punkthaufens H liegt, kann durch einen kleineren K_2 ersetzt werden. Man braucht nämlich nur um den Mittelpunkt M von K_1 durch den von M am weitesten entfernten Punkt des Haufens den Kreis K_2 zu schlagen. Dieser verläuft ganz in K_1, da K_1 alle Punkte von H, also auch den herausgegriffenen auf K_2 liegenden, enthält. Außerdem ist K_2 offenbar auch Umfassungskreis von H.

II. Ein Umfassungskreis K_3, auf dem nur *ein* Punkt des Punkthaufens H liegt, läßt sich verkleinern (Fig. 58). Sei P_1 der Punkt von H auf K_3, so zeichnen wir alle Kreise, die in P_1 mit K_3 die gemeinsame Tangente besitzen und auf denen noch ein weiterer Punkt von H liegt. Diese Kreise liegen sämtlich im Innern von K_3. Der größte von ihnen K_4 (der von K_3 verschieden sein muß, da auf K_3 nur P_1, auf K_4 aber außer P_1 noch ein weiterer Punkt von H liegt) umfaßt alle anderen und damit auch alle Punkte von H und enthält *zwei* der n Punkte auf der Peripherie. Er ist kleiner als K_3.

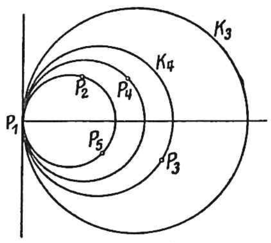

Fig. 58.

III. Die Punkte von H, die auf einem Umfassungskreise liegen, teilen ihn in Kreisbogen ein, die ihrerseits von Punkten von H frei sind. Unter einem „punktfreien" Kreisbogen wollen wir im folgenden kurz einen Kreisbogen verstehen, auf dem kein Punkt von H liegt; die Endpunkte eines punktfreien Bogens können aber Punkte von H sein.

In dieser Sprechweise behaupten wir nun: Ein Umfassungskreis K_5, der einen punktfreien Bogen von mehr als einem Halbkreis aufweist, läßt sich durch einen kleineren Umfassungskreis K_6 ersetzen[1].

In der Tat, es seien auf K_5 die Punkte P_1 und P_2 die zu H gehörenden Endpunkte des punktfreien Bogens b von mehr als Halbkreislänge (s. Fig. 59). Über $P_1 P_2$ als Durchmesser werde der Kreis K^* geschlagen. Enthält er alle Punkte von H, so ist er schon ein kleinerer Umfassungskreis als K_5, denn K_5, in dem ja die Sehne $P_1 P_2$ keinen Durchmesser darstellt (da b kein Halbkreis sein soll), muß größer sein als K^*. Enthält jedoch K^* nicht alle Punkte von H, so müssen die nicht von K^* um-

[1] Die Fälle I und II können übrigens als Spezialfälle von III aufgefaßt werden, denn in jenen beiden Fällen ist sogar ein Vollkreisbogen punktfrei.

faßten Punkte in dem (schraffierten) sichelförmigen Gebiet zwischen b und K^* liegen; dabei enthält b selbst außer seinen Endpunkten $P_1\,P_2$ nach Voraussetzung keinen weiteren Punkt von H. Durch die in der schraffierten Sichel gelegenen Punkte von H mögen nun alle Kreise gelegt werden, die auch durch P_1 und P_2 gehen. Innerhalb von K_5 verlaufen sie in der schraffierten Sichel, also außerhalb von K^*, und in dem Teil, in dem sie innerhalb K^* verlaufen, liegen sie außerhalb von K_5. Es sei K_6 derjenige dieser Kreise, dessen Bogen in der schraffierten Sichel sich am weitesten von der Sehne $P_1\,P_2$ entfernt. Er umfaßt alle Punkte von H, da er alle in der schraffierten Sichel gelegenen Punkte von H enthält und außerdem den gemeinsamen Teil von K_5 und K^* enthält, in dem alle übrigen Punkte von H liegen müssen. Ferner ist K_6 kleiner als K_5, da K_6 zwischen K_5 und K^* verläuft und somit der Mittelpunkt von K_6 näher an der Sehne $P_1\,P_2$ liegt als der Mittelpunkt von K_5 selbst.

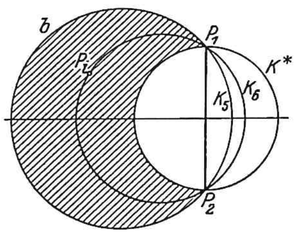

Fig. 59.

Auf einem Umfassungskreis, der sich nach den Vorschriften I, II, III nicht mehr verkleinern läßt, darf es also keinen punktfreien Kreisbogen von mehr als Halbkreislänge geben. Ein solcher Umfassungskreis muß also entweder zwei Punkte von H als Endpunkte eines Durchmessers aufweisen oder durch drei oder mehr Punkte von H gehen, die zwischen sich nur Bogen von weniger als der Hälfte des Kreisumfanges frei lassen. Ein Kreis der ersten Art werde im folgenden als „umfassender Diametralkreis", ein Kreis der anderen Art als „umfassender Dreipunktekreis" bezeichnet. Die Schritte I, II, III enthalten offenbar zugleich auch ein Verfahren, um einen Umfassungskreis von einer der beiden Arten herzustellen.

4. Wir denken uns nun alle Kreise, die eine Verbindungsstrecke von je zwei Punkten des Haufens als Durchmesser besitzen, und ferner alle Kreise, die je durch drei Punkte des Punkthaufens gehen, gezeichnet[1]. Diese endlich vielen Kreise brauchen natürlich nicht alle Umfassungskreise zu sein. Aber jedenfalls sind unter ihnen auch die soeben definierten umfassenden Diametralkreise und umfassenden Dreipunktekreise enthalten. Daraus erkennen wir jetzt, daß es von diesen besonderen Umfassungskreisen auch nur endlich viele geben kann. Diese suchen wir heraus und bestimmen durch endlich viele Vergleichungen den *kleinsten* unter ihnen; wir nennen ihn k. *Dann ist k der kleinste unter allen überhaupt möglichen Umfassungskreisen*, da er sich durch Vergleich mit allen umfassenden Diametral- und Dreipunktekreisen ergeben hat und nach

[1] Das sind zusammen höchstens $\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Kreise.

ichelförmigen Gebiet zwischen
ußer seinen Endpunkten $P_1\,P_2$
ınkt von H. Durch die in der
Sichel gelegenen Punkte von
un alle Kreise gelegt werden,
rch P_1 und P_2 gehen. Inner-
$_5$ verlaufen sie in der schraf-
l, also außerhalb von K^*, und
in dem sie innerhalb K^* ver-
n sie außerhalb von K_5. Es sei
e dieser Kreise, dessen Bogen
ffierten Sichel sich am weite-
er Sehne $P_1\,P_2$ entfernt. Er
in der schraffierten Sichel ge-
ßerdem den gemeinsamen Teil
übrigen Punkte von H liegen
K_6 zwischen K_5 und K^* ver-
K_6 näher an der Sehne $P_1\,P_2$

ıach den Vorschriften I, II, III
keinen punktfreien Kreisbogen
solcher Umfassungskreis muß
punkte eines Durchmessers auf-
te von H gehen, die zwischen
e des Kreisumfanges frei lassen.
genden als „umfassender Dia-
als „umfassender Dreipunkte-
II enthalten offenbar zugleich
ngskreis von einer der beiden

ie eine Verbindungsstrecke von
ıesser besitzen, und ferner alle
nkthaufens gehen, gezeichnet[1].
türlich nicht alle Umfassungs-
ihnen auch die soeben definier-
assenden Dreipunktekreise ent-
es von diesen besonderen Um-
geben kann. Diese suchen wir
e Vergleichungen den *kleinsten*
der kleinste unter allen überhaupt
h durch Vergleich mit allen
kreisen ergeben hat und nach

$) + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Kreise.

I, II und III erst recht kleiner sein muß als alle Umfassungskreise, die keine Diametral- oder Dreipunktekreise sind. Überdies ist er *eindeutig* bestimmt. Denn gäbe es einen zweiten Umfassungskreis k' von derselben Größe wie k (Fig. 60), so läge H sowohl in k als auch in k', also auch in dem gemeinsamen Gebiet von k und k', einem Kreisbogenzweieck, um das man aber einen kleineren Umfassungskreis k^* ziehen könnte, gegen die Minimaleigenschaft von k. Diesen eindeutig bestimmten kleinsten Umfassungskreis des Punkthaufens H wollen wir den „*Pferchkreis*" des Punkthaufens H nennen.

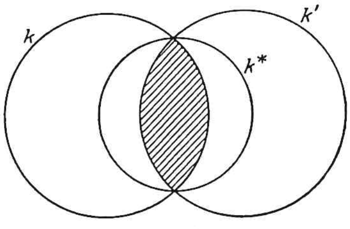

Fig. 60.

Der Pferchkreis k kann keinen punktfreien Bogen aufweisen von mehr als Halbkreislänge, da er sonst nach III nicht der kleinste Umfassungskreis sein könnte.

5. Von diesem Pferchkreis k zeigen wir nun, daß sein Radius die Größe $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ nicht überschreitet. Zu diesem Zwecke suchen wir ein auf der Peripherie von k gelegenes Punktpaar von möglichst großem Abstand δ auf, der seinerseits natürlich höchstens gleich der Spannung d des Punkthaufens sein kann.

Es kann *erstens* sein, daß auf k zwei Punkte von H einander diametral gegenüberliegen. Dann ist der Durchmesser $2r$ von k gleich $\delta \leqq d$, also $r \leqq \frac{d}{2}$, also jedenfalls $r < \frac{d}{3}\sqrt{3}$.

Zweitens sei dies nicht der Fall. Dann suchen wir unter den punktfreien Bögen von k den größten (oder wenn es mehrere gleich große gibt, *einen* größten) Bogen b heraus, dessen Endpunkte P_1 und P_2 heißen mögen und zu H gehören. Dieser Bogen b ist gewiß *kleiner* als der Halbkreis, denn größer als dieser kann, wie vorhin festgestellt, ein punktfreier Bogen von k nicht sein, und gleich dem Halbkreis ist b nicht, da sonst seine Endpunkte P_1 und P_2 einander diametral gegenüberlägen, was als schon erledigt jetzt ausgeschlossen sein sollte. Wir ziehen die Sehne in dem Bogen b und errichten auf ihren Endpunkten die Lote, die den Kreis in zwei weiteren Punkten Q_1 und Q_2 treffen und dadurch einen Bogen b' von Q_1 bis Q_2 aus k ausschneiden, der b gegenüberliegt und zu b kongruent ist (Fig. 61). Die Punkte Q_1 und Q_2 gehören nicht zu H, denn Q_1 liegt P_2 und Q_2 liegt P_1 diametral gegenüber, und solche

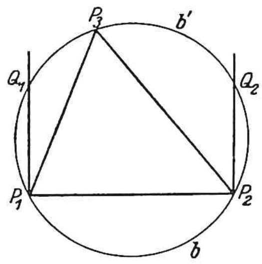

Fig. 61.

Punktpaare soll es in dem jetzt betrachteten Falle in H nicht geben. Der *Bogen b' kann nun nicht punktfrei sein,* denn wäre er es, so müßte er, da seine Endpunkte nicht zu H gehören, in einem noch größeren punktfreien Bogen liegen. Das ist aber ausgeschlossen, da kein punktfreier Bogen länger als b sein sollte.

Folglich enthält b' zwischen Q_1 und Q_2 mindestens einen Punkt P_3 von H. Die Punkte $P_1\,P_2\,P_3$ bilden ein *spitzwinkliges Dreieck.* Die Winkel bei P_1 und P_2 sind nämlich spitz, da sie kleiner sind als die bei P_1 und P_2 konstruierten rechten Winkel, und der Winkel bei P_3 ist spitz, da der Bogen b, über dem er als Peripheriewinkel steht, kleiner ist als ein Halbkreis. (Zu kleinerem Bogen gehört ein kleinerer Peripheriewinkel, und nach dem Satz des THALES ist erst der Peripheriewinkel eines Halbkreises gleich einem Rechten.)

Unter den drei Bögen, in die k durch P_1, P_2, P_3 zerfällt, muß mindestens einer einen Drittelkreis oder mehr umfassen, aber wegen der Spitzwinkligkeit von $P_1\,P_2\,P_3$ kleiner als ein Halbkreis sein. Seine Sehne $P_i\,P_j$ muß also mindestens so groß sein wie die Sehne des Drittelkreises, d. h. wie die Seite s des dem Kreise k eingeschriebenen regulären Dreiecks. Da die Entfernung $P_i\,P_j$ höchstens die Spannung d sein kann, haben wir festgestellt $s \leqq d$.

Der Radius des Umkreises um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge s ist (nach 2.) $r = \frac{s}{3}\sqrt{3}$. Wegen $s \leqq d$ ist daher der Radius von k

$$r \leqq \frac{d}{3}\sqrt{3},$$

was zu beweisen war.

6. Wir können nun leicht erkennen, daß die Schranke $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ für den Radius des Pferchkreises eines Punkthaufens von der Spannung d

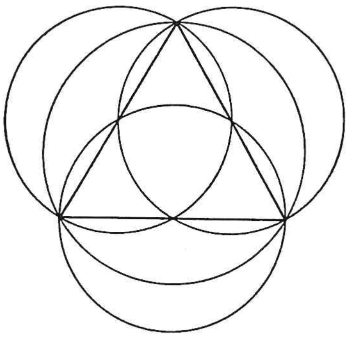

Fig. 62.

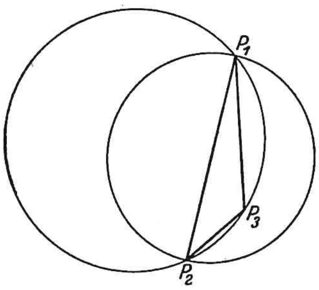

Fig. 63.

sich im allgemeinen nicht weiter verkleinern läßt. Denn für ein gleichseitiges Dreieck mit den Seiten d ist der Umkreis, der ja den Radius

$\frac{d}{3}\sqrt{3}$ hat, selbst der Pferchkreis d
Punkthaufens. Denn der Pferchk
unter den Diametral- und den D
Diametralkreise enthalten aber j
seitigen Dreiecks (Fig. 62), es blei
Umkreis als der einzig in Betrac
kreis übrig. Es ist zwar anschaulic
eines gleichseitigen Dreiecks der
punkte ist, aber dennoch nicht vö
kreis eines *stumpfwinkligen* Dreie
fens seiner Eckpunkte; vielmehr i
größten Seite (Fig. 63).

15. Annäherung irration

Daß π, die Zahl, die den Inh
ungefähr $\frac{22}{7}$, daß $\sqrt{2}$ nahebei $\frac{7}{5}$ ist,
Was ist eigentlich der klare, mat
Was ist der Sinn der Worte „ung
in das Lexikon des präzisen Mat

1. Ist irgendeine Zahl w gege
von ihr Brüche oder, wie der Ma
den. Z. B. hat man für die Za
entwicklung $\pi = 3{,}14159\ldots$ ke

$$3{,}1 = \frac{31}{10}; \quad 3{,}14 = $$

die immer näher an π heranrück
weniger als $\frac{1}{10}$ von π ab (denn
weniger als $\frac{1}{100}$ usf. Und in ders
Dezimalbruchentwicklung man
approximieren.

Es ist vielleicht ein Schönh
eben machten, so sehr mit der
bunden worden ist, das doch nu
Natur unserer Mathematik beg
leicht davon befreien und folge
$10^2, \ldots$ durch ein beliebiges n e

Satz 1: *Ist w irgend eine*
gibt es eine r a t i o n a l e *Zahl*
weniger als $\frac{1}{n}$ abweicht: $0 \leqq u$

teten Falle in H nicht geben.
ı, denn wäre er es, so müßte
ren, in einem noch größeren
ısgeschlossen, da kein punkt-

$_2$ mindestens einen Punkt P_3
n *spitzwinkliges Dreieck.* Die
z, da sie kleiner sind als die
el, und der Winkel bei P_3 ist
eripheriewinkel steht, kleiner
en gehört ein kleinerer Peri-
ALES ist erst der Peripherie-
chten.)
P_1, P_2, P_3 zerfällt, muß min-
ır umfassen, aber wegen der
in Halbkreis sein. Seine Sehne
die Sehne des Drittelkreises,
eingeschriebenen regulären
ns die Spannung d sein kann,

eichseitiges Dreieck mit der
n $s \leqq d$ ist daher der Radius

ß die Schranke $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ für den
ıfens von der Spannung d

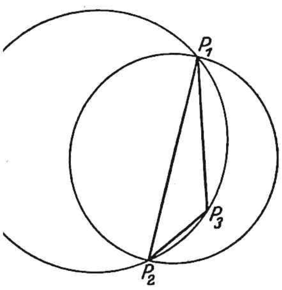

Fig. 63.

n läßt. Denn für ein gleich-
Umkreis, der ja den Radius

$\frac{d}{3}\sqrt{3}$ hat, selbst der Pferchkreis des aus den Endpunkten bestehenden Punkthaufens. Denn der Pferchkreis eines Punkthaufens ist nach 4. unter den Diametral- und den Dreipunktekreisen zu suchen. Die drei Diametralkreise enthalten aber je nur zwei Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks (Fig. 62), es bleibt also *der* Dreipunktekreis, d. h. der Umkreis als der einzig in Betracht kommende minimale Umfassungskreis übrig. Es ist zwar anschaulich sehr einleuchtend, daß der Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks der Pferchkreis des Haufens seiner Eckpunkte ist, aber dennoch nicht völlig selbstverständlich. Denn der Umkreis eines *stumpfwinkligen* Dreiecks ist *nicht* der Pferchkreis des Haufens seiner Eckpunkte; vielmehr ist dies der Diametralkreis über seiner größten Seite (Fig. 63).

15. Annäherung irrationaler Zahlen durch rationale.

Daß π, die Zahl, die den Inhalt des Kreises vom Radius 1 mißt, ungefähr $\frac{22}{7}$, daß $\sqrt{2}$ nahebei $\frac{7}{5}$ ist, spielte schon bei den Alten eine Rolle. Was ist eigentlich der klare, mathematische Sinn derartiger Aussagen? Was ist der Sinn der Worte „ungefähr", „nahebei", die eigentlich nicht in das Lexikon des präzisen Mathematikers gehören?

1. Ist irgendeine Zahl w gegeben, so kann man in beliebiger Nähe von ihr Brüche oder, wie der Mathematiker sagt, rationale Zahlen finden. Z. B. hat man für die Zahl π, wenn man ihre Dezimalbruchentwicklung $\pi = 3{,}14159\ldots$ kennt, die folgenden Brüche

$$3{,}1 = \frac{31}{10};\quad 3{,}14 = \frac{314}{100};\quad 3{,}141 = \frac{3141}{1000};\ \cdots,$$

die immer näher an π heranrücken. Der 1. Bruch weicht offenbar um weniger als $\frac{1}{10}$ von π ab $\left(\text{denn } 3{,}2 = \frac{32}{10} \text{ ist schon zuviel}\right)$, der 2. um weniger als $\frac{1}{100}$ usf. Und in derselben Weise kann man jede Zahl, deren Dezimalbruchentwicklung man kennt, durch Brüche beliebig genau approximieren.

Es ist vielleicht ein Schönheitsfehler, daß diese Aussage, die wir eben machten, so sehr mit der Zufälligkeit unseres Zehnersystems verbunden worden ist, das doch nur im Bau unseres Körpers, nicht in der Natur unserer Mathematik begründet ist. Wir können die Aussage leicht davon befreien und folgende Behauptung aufstellen, in der 10, $10^2, \ldots$ durch ein beliebiges n ersetzt ist.

Satz 1: *Ist w irgend eine Zahl und n irgend eine ganze Zahl, so gibt es eine* r a t i o n a l e *Zahl mit dem Nenner n, $\frac{m}{n}$, die von w um weniger als $\frac{1}{n}$ abweicht:* $0 \leqq w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$.