Lösungen Übung 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**
Seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Lösung: Sei $x \in (A \cap B) \cup C$ beliebig. Ist $x \in C$, so folgt auch $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$, also $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Ist $x \notin C$, so muss $x \in A \cap B$ gelten, d. h. $x \in A$ und $x \in B$ und folglich auch $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$, also $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Sei nun umgekehrt $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ beliebig. Ist $x \in C$, so ist auch $x \in (A \cap B) \cup C$. Anderenfalls muss wegen $x \in A \cup C$ aber $x \in A$ gelten und wegen $x \in B \cup C$ ebenfalls $x \in B$. Also ist $x \in A \cap B$ und daher auch $x \in (A \cap B) \cup C$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.** Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie ggf. die Umkehrabbildung.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 + 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ x^3 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Lösung:
(a) Es gilt $f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (binomische Formel). Wegen $(x+1)^2 \geq 0$ folgt also $f(x) \geq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f nicht surjektiv, da z. B. $-2 \notin \operatorname{Im}(f)$.
Ferner ist z. B. $f(0) = 0 = f(-2)$, also ist f auch nicht injektiv.
(b) Wir zeigen zuerst, dass g injektiv ist. Seien dazu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$. O. B. d. A. können wir $x_1 < x_2$ annehmen.
1. Fall: Es ist $0 \leq x_1 < x_2$. Dann folgt $g(x_1) = 3x_1^2 < 3x_2^2 = g(x_2)$.
2. Fall: Es ist $x_1 < 0 \leq x_2$. Dann ist $g(x_1) = x_1^3 < 0 \leq 3x_2^2 = g(x_2)$.
3. Fall: Es ist $x_1 < x_2 < 0$. Dann gilt $-x_1 > -x_2 > 0$ und somit $g(x_1) = x_1^3 = -(-x_1)^3 < -(-x_2)^3 = x_2^3 = g(x_2)$.
Also ist in jedem Fall $g(x_1) \neq g(x_2)$, d. h. g ist injektiv.
Als Nächstes zeigen wir, dass g auch surjektiv ist. Sei dazu $y \in \mathbb{R}$ beliebig.
Ist $y \geq 0$, so setzen wir $x := \sqrt{y/3}$ und erhalten $g(x) = 3x^2 = y$.
Ist $y < 0$, setze $x := -\sqrt[3]{-y}$. Dann gilt $g(x) = x^3 = (-1)^3(\sqrt[3]{-y})^3 = y$.
Somit ist g auch surjektiv und für die Umkehrabbildung gilt

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y/3} & \text{für } y \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte)**.** Gegeben seien Mengen A, B und C und Funktionen $g : A \to B$ und $f : B \to C$. Beweisen Sie:

(i) Sind f und g injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

(ii) Sind f und g surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv.

(iii) Sind f und g bijektiv, so ist auch $f \circ g$ bijektiv und für die Umkehrabbildung gilt $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Lösung:
(i) Seien f und g injektiv. Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $(f \circ g)(a_1) = (f \circ g)(a_2)$, also $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$. Wegen der Injektivität von f folgt daraus $g(a_1) = g(a_2)$. Weil auch g injektiv ist, folgt nun $a_1 = a_2$. Also ist $f \circ g$ injektiv.
(ii) Seien f und g surjektiv. Sei $c \in C$ beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $f(b) = c$. Weil g surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $g(a) = b$. Es folgt $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$. Also ist $f \circ g$ surjektiv.
(iii) Seien f und g bijektiv. Wegen (i) und (ii) ist dann auch $f \circ g$ bijektiv. Ferner gilt für alle $c \in C$

$$(f \circ g)((g^{-1} \circ f^{-1})(c)) = f(g(g^{-1}(f^{-1}(c)))) = f(f^{-1}(c)) = c$$

und somit $(f \circ g)^{-1}(c) = (g^{-1} \circ f^{-1})(c)$.