Geraden in der Ebene und Zerlegungen von Graphen

Kapitel 10

Vielleicht das bekannteste Problem über Geraden in der Ebene wurde 1893 von James Joseph Sylvester in der Problemecke der Educational Times gestellt: Man beweise, dass es nicht möglich ist, eine endliche Anzahl reeller Punkte so anzuordnen, dass jede Gerade durch zwei der Punkte immer auch durch einen dritten der Punkte geht, es sei denn, alle Punkte liegen auf derselben Geraden:

QUESTIONS FOR SOLUTION.

11851. (Professor SYLVESTER.)—**Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line.**

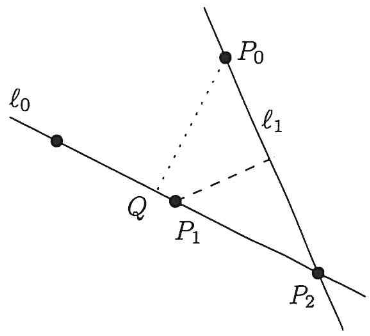
Ob Sylvester selber dafür einen Beweis hatte, wissen wir nicht — die in der Educational Times publizierte „Musterlösung" war jedenfalls ziemlich unsinnig. Einen korrekten Beweis hat erst Tibor Gallai [Grünwald] mehr als vierzig Jahre später angegeben; deshalb wird der folgende Satz üblicherweise Sylvester und Gallai zugeschrieben. Im Gefolge von Gallais Beweis sind etliche andere, ganz unterschiedliche Beweise erschienen, unter ihnen der folgende von L. M. Kelly, der zu Recht Berühmtheit erlangt hat.

J. J. Sylvester

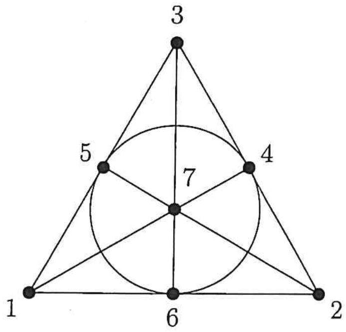
Satz 1. *Für jede Anordnung von endlich vielen Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen, gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.*

■ **Beweis.** Sei $\mathcal{P}$ die gegebene Menge von Punkten. Wir betrachten die (endliche) Menge $\mathcal{L}$ aller Geraden, die mindestens zwei der Punkte von $\mathcal{P}$ enthalten. Unter allen Paaren (P, ℓ), für die $P \in \mathcal{P}$ nicht auf $\ell \in \mathcal{L}$ liegt, wählen wir ein Paar (P_0, ℓ_0) aus, für das der Punkt P_0 den kleinsten Abstand von der Geraden ℓ_0 hat; dabei bezeichnen wir mit Q den Punkt auf ℓ_0, der am nächsten zu P_0 liegt (also auf der Geraden durch P_0, die senkrecht auf ℓ_0 steht).

Behauptung. *Die Gerade ℓ_0 tut's!*



Wenn dies nicht so wäre, dann würde ℓ_0 mindestens drei Punkte aus $\mathcal{P}$ enthalten, und damit müssten zwei dieser Punkte, die wir P_1 und P_2 nennen, auf derselben Seite von Q liegen. Nehmen wir jetzt an, dass P_1 zwischen Q und P_2 liegt, wobei P_1 mit Q zusammenfallen könnte. Die Zeichnung auf der rechten Seite zeigt die Konfiguration. Man sieht an ihr, dass der Abstand von P_1 zur Geraden ℓ_1, die durch P_0 und P_2 bestimmt wird, kleiner wäre als der Abstand zwischen P_0 und ℓ_0 — und dies widerspricht unserer Auswahl von ℓ_0 und P_0. □

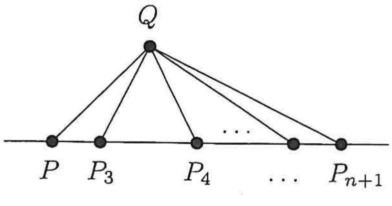


In diesem Beweis haben wir metrische Axiome („kleinster Abstand“) und Ordnungsaxiome („P_1 liegt zwischen Q und P_2“) der reellen Ebene verwendet. Brauchen wir wirklich beide Eigenschaften, zusätzlich zu den üblichen Inzidenzaxiomen für Punkte und Geraden? Nun, dass man irgendeine zusätzliche Bedingung braucht, kann man an der berühmten Fano-Ebene sehen, die auf dem linken Rand abgebildet ist. Hier ist $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, 7\}$ und $\mathcal{L}$ besteht aus den sieben drei-Punkt-Geraden, die in der Zeichnung angedeutet sind, inklusive der „Geraden“ $\{4, 5, 6\}$. Hier bestimmen je zwei Punkte immer genau eine Gerade, so dass die Inzidenzaxiome erfüllt sind, aber es gibt keine zwei-Punkt-Gerade. Der Sylvester-Gallai-Satz zeigt daher, dass die Fano-Konfiguration nicht so in die reelle Ebene eingebettet werden kann, dass jedes der sieben kollinearen Tripel auf einer reellen Geraden liegt — es muss in jeder reellen Einbettung immer eine „krumme“ Gerade geben.

Andererseits wurde aber von Coxeter gezeigt, dass die Anordnungsaxiome schon ausreichen, um den Sylvester-Gallai-Satz zu beweisen. Man kann also einen Beweis angeben, der überhaupt keine metrischen Eigenschaften verwendet — dies spiegelt sich auch in dem Beweis mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel wider, den wir in Kapitel 12 angeben werden.

Aus dem Sylvester-Gallai-Satz folgt ganz einfach ein anderes berühmtes Resultat über Punkte und Geraden in der Ebene, das auf Paul Erdős und Nicolaas G. de Bruijn zurückgeht. Aber in diesem Falle gilt das Resultat viel allgemeiner, für allgemeine Punkt-Geraden-Systeme, wie schon Erdős und de Bruijn bemerkt haben. Dieses allgemeinere Resultat werden wir in Satz 3 besprechen.

Satz 2. *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann besteht die Menge $\mathcal{L}$ der Geraden, die durch mindestens zwei Punkte in $\mathcal{P}$ gehen, aus mindestens n Geraden.*



■ **Beweis.** Für $|\mathcal{P}| = 3$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $|\mathcal{P}| = n + 1$. Nach dem Sylvester-Gallai-Satz gibt es dann eine Gerade $\ell_0 \in \mathcal{L}$, die genau zwei Punkte P und Q von $\mathcal{P}$ enthält. Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}' = \mathcal{P}\backslash\{Q\}$, und schreiben $\mathcal{L}'$ für die Menge der Geraden, die durch $\mathcal{P}'$ bestimmt sind. Wenn die Punkte von $\mathcal{P}'$ nicht alle auf einer Geraden liegen, dann gilt nach Induktion $|\mathcal{L}'| \geq n$ und deshalb $|\mathcal{L}| \geq n + 1$, wegen der zusätzlichen Geraden ℓ_0 in $\mathcal{L}$. Wenn andererseits die Punkte in $\mathcal{P}'$ alle auf einer einzigen Geraden liegen, dann haben wir ein „Geradenbüschel“, das genau $n + 1$ Geraden bestimmt. □

Nun kommt, wie versprochen, ein Resultat, das auf sehr viel allgemeinere „Inzidenzgeometrien“ anwendbar ist.

Satz 3. *Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen, und seien $A_1, \ldots, A_m$ echte Teilmengen von X, so dass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.*

■ **Beweis.** Der folgende Beweis, der manchmal Motzkin und manchmal Conway zugeschrieben wird, ist fast ein Einzeiler und wirklich bemerkenswert. Für $x \in X$ sei r_x die Anzahl der Mengen A_i, die x enthalten. Aus den

Annahmen folgt dabei, dass $2 \leq r_x < m$ gilt. Wenn nun $x \notin A_i$ ist, dann gilt $r_x \geq |A_i|$, weil dann die $|A_i|$ Mengen verschieden sein müssen, die x und ein Element der Menge A_i enthalten. Nehmen wir nun an, dass $m < n$ gilt. Dann haben wir $m|A_i| < n r_x$ und somit $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$ für $x \notin A_i$, und damit folgt schließlich

$$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m-r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n-|A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1,$$

was absurd ist. □

Es gibt einen anderen sehr kurzen Beweis dieses Satzes, der Lineare Algebra verwendet. Sei B dafür die *Inzidenzmatrix* von $(X; A_1, \ldots, A_m)$, so dass also die Zeilen von B den Elementen von X zugeordnet sind, während die Spalten von B den Mengen $A_1, \ldots, A_m$ entsprechen, mit

$$B_{xA} := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Nun betrachten wir das Produkt BB^T. Für $x \neq x'$ gilt $(BB^T)_{xx'} = 1$, weil x und x' in genau einer gemeinsamen Menge A_i enthalten sind, und damit

$$BB^T = \begin{pmatrix} r_{x_1}-1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_{x_2}-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & r_{x_n}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei r_x wie oben definiert ist. Da die erste Matrix positiv-definit ist (sie hat nur positive Eigenwerte) und die zweite Matrix positiv-semidefinit ist (sie hat die Eigenwerte n und 0), schließen wir, dass BB^T positiv-definit ist, also insbesondere invertierbar mit $\text{Rang}(BB^T) = n$. Also hat die $(n \times m)$-Matrix B mindestens Rang n, und wir schließen daraus $n \leq m$, weil der Rang nie größer sein kann als die Anzahl der Spalten einer Matrix.

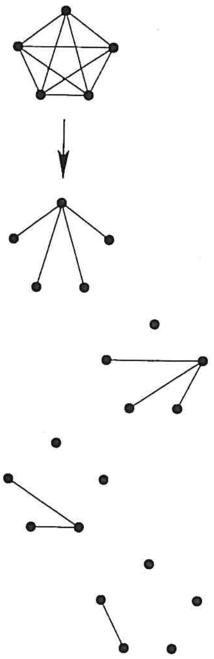
Jetzt machen wir einen Sprung und wenden uns der Graphentheorie zu. (Eine kleine Zusammenfassung graphentheoretischer Konzepte findet sich im Anhang dieses Kapitels.) Man überlegt sich leicht, dass die folgende Aussage nur eine Übersetzung von Satz 3 in die Sprache der Graphentheorie darstellt:

Satz 3′. *Wenn wir den vollständigen Graphen K_n so in m kleinere Cliquen zerlegen, dass jede Kante in genau einer der Cliquen liegt, dann ist $m \geq n$.*

Wenn wir nämlich X mit der Eckenmenge von K_n identifizieren, und die Mengen A_i den Eckenmengen der Cliquen zuordnen, dann erhalten wir aus Satz 3 genau diese Aussage.

Unsere nächste Aufgabe ist nun, den K_n in möglichst wenige *vollständige bipartite* Graphen so zu zerlegen, dass jede Kante in genau einem dieser

Graphen liegt. Dafür gibt es eine ganz einfache Möglichkeit. Wir nummerieren die Ecken $1, 2, \ldots, n$. Dann nehmen wir zunächst den vollständigen bipartiten Graphen, in dem 1 mit allen anderen Ecken verbunden ist. Dies liefert den Graphen $K_{1,n-1}$, den man auch einen *Stern* nennt. Als Nächstes verbinden wir 2 mit $3, \ldots, n$, was einen Stern $K_{1,n-2}$ liefert. Auf dieselbe Weise fahren wir fort und erhalten damit eine Zerlegung von K_n in Sterne $K_{1,n-1}, K_{1,n-2}, \ldots, K_{1,1}$. Diese Zerlegung verwendet $n-1$ vollständige bipartite Graphen. Aber geht es nicht besser, mit weniger Graphen? Die Antwort ist Nein, wie das folgende Resultat von Ron Graham und Henry O. Pollak besagt.



Eine Zerlegung des K_5 in 4 vollständige bipartite Untergraphen

Satz 4. *Wenn man den Graphen K_n in vollständige bipartite Untergraphen $H_1, \ldots, H_m$ zerlegt, dann ist $m \geq n-1$.*

Interessanterweise kennt man dafür, im Gegensatz zum Erdős-de Bruijn-Satz, keinen vollständig kombinatorischen Beweis! Auf die eine oder andere Art scheint man Lineare Algebra verwenden zu müssen. Von den verschiedenen, mehr oder weniger äquivalenten Ideen betrachten wir hier den Beweis von Helge Tverberg, der vielleicht der durchsichtigste ist.

■ **Beweis.** Sei die Eckenmenge von K_n mit $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet, und seien L_j, R_j die definierenden Eckenmengen der vollständigen bipartiten Graphen H_j, $j = 1, \ldots, m$. Jeder Ecke i ordnen wir eine Variable x_i zu. Da $H_1, \ldots, H_m$ eine Zerlegung des K_n bilden, haben wir

$$\sum_{i<j} x_i x_j \;=\; \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_k} x_a \cdot \sum_{b \in R_k} x_b \Big). \tag{1}$$

Nun nehmen wir an, dass der Satz falsch ist, $m < n-1$. Dann hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_n &= 0, \\ \sum_{a \in L_k} x_a &= 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

weniger Gleichungen als Variablen, also gibt es eine nichttriviale Lösung $c_1, \ldots, c_n$. Aus (1) schließen wir

$$\sum_{i<j} c_i c_j \;=\; 0.$$

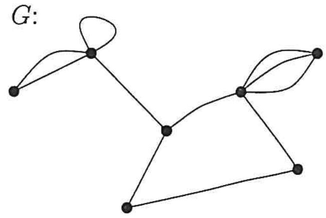
Aber dies impliziert

$$0 \;=\; (c_1 + \ldots + c_n)^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i c_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \;>\; 0,$$

also einen Widerspruch, der den Beweis abschließt. □

Anhang: Über Graphen

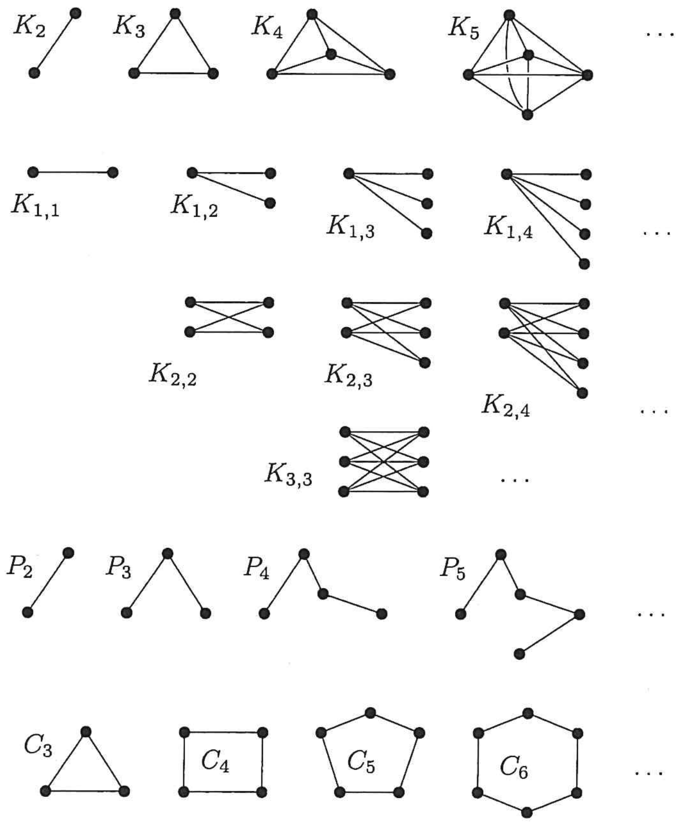
Graphen sind fundamentale mathematische Strukturen. Dementsprechend gibt es von ihnen viele verschiedene Versionen, Darstellungen und Inkarnationen. Abstrakt ist ein *Graph* ein Paar $G = (V, E)$, wobei V die Menge der *E*cken ist, E die Menge der *K*anten, und jede Kante $e \in E$ zwei Ecken $v, w \in V$ „verbindet". Wir betrachten nur endliche Graphen, für die V und E endlich sind.



Ein Graph G mit 7 Ecken und 11 Kanten. Er hat eine Schlinge, eine Doppelkante und eine Dreifachkante.

Üblicherweise haben wir es mit *einfachen Graphen* zu tun: Dann lassen wir keine *Schlingen* zu, also keine Kanten, die eine Ecke mit sich selbst verbinden, und keine *vielfachen Kanten*, die dieselbe Eckenmenge haben. Ecken eines Graphen heißen *benachbart* oder *adjazent*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Eine Ecke und eine Kante heißen *inzident*, wenn die Kante die Ecke mit einer anderen verbindet.

Hier kommt eine kleine Bildergalerie von wichtigen (einfachen) Graphen:



Die *vollständigen Graphen* K_n mit n Ecken und $\binom{n}{2}$ Kanten

Die *vollständigen bipartiten Graphen* $K_{m,n}$ mit $m+n$ Ecken

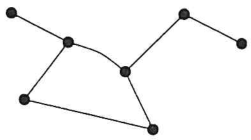
Die *Wege* P_n mit n Ecken

Die *Kreise* C_n mit n Ecken

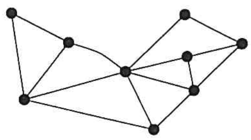
Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, wenn es Bijektionen $V \to V'$ und $E \to E'$ gibt, die die Inzidenzen zwischen Ecken und den sie verbindenden Kanten erhalten. Es ist ein großes ungelöstes Problem, ob es ein effektives Verfahren gibt um zu testen, ob zwei gegebene

Graphen isomorph sind. Dieser Begriff von „isomorph" erlaubt es uns, über *den* vollständigen Graphen K_5 auf fünf Ecken zu reden, usw.

$G' = (V', E')$ ist ein *Untergraph* von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist, und wenn jede Kante $e \in E'$ dieselben Ecken in G' verbindet wie in G. Dabei ist G' ein *induzierter Untergraph*, wenn zusätzlich *alle* Kanten von G, die Ecken von G' verbinden, auch Kanten von G' sind.



ist ein Untergraph von



Viele Begriffe über Graphen sind ziemlich naheliegend: Zum Beispiel ist ein Graph G *zusammenhängend*, wenn es zwischen zwei verschiedenen Ecken von G immer einen Weg in G gibt, oder äquivalent dazu, wenn man G nicht in zwei Untergraphen mit disjunkten Eckenmengen aufteilen kann. Jeder Graph zerfällt damit in seine *zusammenhängenden Komponenten.*

Wir beenden diese Übersicht über graphentheoretische Konzepte mit ein paar zusätzlichen Begriffen: Eine *Clique* in G ist ein vollständiger Untergraph. Eine *unabhängige Menge* in G ist ein induzierter Untergraph ohne Kanten, also eine Menge von Ecken, in der keine zwei durch eine Kante verbunden sind. Ein Graph ist ein *Wald*, wenn er keine Kreise enthält. Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Wald. Schließlich ist ein Graph *bipartit*, wenn er zu einem Untergraphen eines vollständigen bipartiten Graphen isomorph ist, wenn man also seine Eckenmenge als Vereinigung $V = V_1 \cup V_2$ von zwei unabhängigen Mengen schreiben kann.

Literatur

[1] N. G. DE BRUIJN & P. ERDŐS: *On a combinatorial problem,* Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. **51** (1948), 1277-1279.

[2] H. S. M. COXETER: *A problem of collinear points,* Amer. Math. Monthly **55** (1948), 26-28 (enthält Kellys Beweis).

[3] P. ERDŐS: *Problem 4065 — Three point collinearity,* Amer. Math. Monthly **51** (1944), 169-171 (enthält Gallais Beweis).

[4] R. L. GRAHAM & H. O. POLLAK: *On the addressing problem for loop switching,* Bell System Tech. J. **50** (1971), 2495-2519.

[5] J. J. SYLVESTER: *Mathematical Question 11851,* The Educational Times **46** (1893), 156.

[6] H. TVERBERG: *On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs,* J. Graph Theory **6** (1982), 493-494.