Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar über "Kombinatorische Geometrie"

Leipzig, den 20.4.2021

*Übersicht: Gebiete der "Kombinatorischen Geometrie"*

Diese Rubrik enthält eine – nicht umfassende – Übersicht über Teilgebiete der "Kombinatorischen Geometrie".

## A Matroidtheorie

*Definition:* Sei $E$ eine beliebige nichtleere Menge und $n \in \mathbb{N}$. Ein auf $E$ definiertes **Matroid vom Rang n** ist ein Paar $M = (E, \mathcal{B})$ mit $\emptyset \subsetneq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

$(B1)$ Für alle $B \in \mathcal{B}$ ist $|B| = n$.

$(B2)$ Es gilt das folgende Analogon zum *Austauschsatz von Steinitz:*
Zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $e \in B_1 \setminus B_2$ gibt es ein $f \in B_2 \setminus B_1$ mit $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\} \in \mathcal{B}$.

$E$ heißt dann die **Grundmenge** und $\mathcal{B}$ das System der **Basen** oder **Basismengen** von $M$.

*Beispiele*

i) Sei $E$ eine Teilmenge eines $n$-dimensionalen Vektorraumes $V$ – über einem beliebigen Körper $K$, deren lineare Hülle der gesamte Vektorraum $V$ ist; das bedeutet: $E$ ist in keiner *homogenen* Hyperebene von $V$ enthalten.
Weiter sei $\mathcal{B}$ das System derjenigen Basen von $V$, die in $E$ enthalten sind. Dann folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz: $M = (E, \mathcal{B})$ ist ein Matroid vom Rang $n$.

ii) Sei $V$ wie in *i)*, aber nun sei $E$ eine Teilmenge von $V$, die in keiner *affinen* Hyperebene von $V$ enthalten ist. Das System der in $E$ enthaltenen *affinen Basen* $\mathcal{B}'$ von $V$ besteht aus denjenigen $(n+1)-$ elementigen Teilmengen von $E$, die in keiner affinen Hyperebene von $V$ enthalten sind.
Dann ist $M' = (E, \mathcal{B}')$ ein Matroid vom Rang $n + 1$.

iii) Sei $E$ eine Menge mit mindestens 3 Elementen und $\mathcal{L}$ ein System von Teilmengen von $E$ – den *Geraden* – mit folgenden Eigenschaften:

$(L1)$ Jede Gerade enthält mindestens zwei Elemente.

$(L2)$ Die gesamte Menge $E$ ist keine Gerade.

$(L3)$ Zu je zwei verschiedenen Elementen $e, f \in E$ gibt es genau ein $L \in \mathcal{L}$ mit $e, f \in L$.

Dann erhält man wie folgt ein Matroid vom Rang 3 auf $E$:
Eine dreielementige Teilmenge $B$ von $E$ ist Basis genau dann, wenn $B$ in keiner Geraden enthalten ist.

Unter dieses Beispiel fallen nicht nur Affine Ebenen, sondern auch viel allgemeinere Ebenen – wie Projektive Ebenen und die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Hyperbolische Ebene – über den Reellen Zahlen.

iv) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph mit $V$ als Vertexmenge (oder Knotenmenge) und $E$ als dem System seiner Kanten; $E$ ist also eine Teilmenge des Systems aller zweielementigen Teilmengen von $V$.
Eine Teilmenge $B$ von $E$ heißt *aufspannender Baum* von $G$, falls auch der Graph $(V, B)$ zusammenhängend ist – und keinen geschlossenen Weg enthält. Dann bilden alle aufspannenden Bäume von $G$ das System der Basismengen eines Matroids – vom Rang $|V| - 1$.

### *Weitere Konzepte in Matroiden*

Im folgenden sei $M = (E, \mathcal{B})$ ein Matroid vom Rang $n$ – mit $\mathcal{B}$ als dem System der Basismengen. Es werden nun gewisse einfache Aspekte der Linearen Algebra übertragen auf $M$.

i) Eine Teilmenge $I$ von $E$ heißt **unabhängig**, falls $I$ in irgendeiner Basis von $M$ enthalten ist.

ii) Die **Rangfunktion** $\rho_M = \rho : E \to \{0, 1, ..., n\}$ von $M$ ist definiert durch:

$$\rho(A) := max\{|I| \, : \, I \text{ ist unabhängige Teilmenge von } A\}.$$

iii) Der **Hüllenoperator** $\sigma_M = \sigma : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ ist definiert durch:

$$\sigma(A) := \{e \in E \,|\, \rho(A \cup \{e\}) = \rho(A)\}.$$

iv) Ein **Teilraum** von $M$ ist eine Teilmenge $F$ von $E$ mit $\sigma(F) = F$.
Die Teilräume vom Rang $n - 1$ heißen **Hyperebenen**; die Teilräume vom Rang $n - 2$ heißen **Hypergeraden**.

### *Bemerkung zum Hüllenoperator*

Der Hüllenoperator $\sigma$ eines Matroids $M = (E, \mathcal{B})$ erfüllt folgende *symmetrische Austauschbedingung:*

Ist $A \subseteq E$, und sind $e, f \in E$ mit $f \in \sigma(A \cup \{e\}) \setminus \sigma(A)$, so ist $e \in \sigma(A \cup \{f\})$.

Von den folgenden ausgewählten Literaturangaben ist [1] ein Standard-Werk. [2] liefert einen Zugang zu Matroiden von *unendlichem Rang*.

### *Literatur*

[1] *James G. Oxley: Matroid Theory, Oxford University Press, Oxford 1992.*

[2] *H. Bruhn, R. Diestel, M. Kriesell, R. Pendavingh, P. Wollan:*
*Axioms for Infinite Matroids,*
*Advances in Mathematics 239, 18 – 46 (2013).*

## B Simpliziale Komplexe

*Definition:* Eine nichtleere geordnete Menge $(\Delta, \leq)$ heißt ein **Simplizialer Komplex**, falls folgende Axiome erfüllt sind:

$(SK1)$ Für alle $A \in \Delta$ ist die Menge $A_* := \{B \in \Delta \,|\, B \leq A\}$ ordnungsisomorph zu der Potenzmenge einer endlichen Menge $I$.

$(SK2)$ Alle Elemente $C, D \in \Delta$ besitzen ein *Infimum* $C \wedge D$; das heißt: Es ist $C \wedge D \leq C$ sowie $C \wedge D \leq D$, und für alle $A \in \Delta$ mit $A \leq C$ und $A \leq D$ ist auch $A \leq C \wedge D$.

Siehe Beispiele von Simplizialen Komplexen – in der Geometrie – auf der nächsten Seite.
Rein kombinatorisch ist es hier egal, ob jeweils der gesamte überdeckte Teil der Fläche – zusammen mit den gezeichneten Kanten und den entstehenden Teildreiecken – als Grundmenge $\Delta$ aufgefasst wird – oder, neben der leeren Menge, nur die Vertizes sowie die zweielementigen Mengen, deren Elemente eine Kante begrenzen und die dreielementigen Mengen, die die Eckpunkte eines Dreiecks sind.
Relevant ist hier: Je zwei – verschiedene – Dreiecke schneiden sich entweder gar nicht oder in einem gemeinsamen Punkt oder in einer gemeinsamen Kante.
Diese Bedingungen sind in den Gegenbeispielen – unten auf der nächsten Seite – nicht erfüllt.

Nach eben erfolgter Bemerkung ist jeder Simpliziale Komplex isomorph zu einer Teilmenge von $\mathcal{P}(X_\Delta)$, wobei $X_\Delta$ die Menge der *Vertizes* – oder *Ecken* von $\Delta$ bezeichnet.
Auf diese Weise erhält man eine *diskrete* Struktur des Simplizialen Komplexes. Man spricht von der *Geometrischen Realisierung*, wenn man das System der Kanten, Dreiecke und gegebenenfalls höherdimensionalen Simplizes (zurück) gewinnen möchte.

Ein Simplizialer Komplex ist ein Graph, wenn dessen Geometrische Realisierung von Kanten – also eindimensionalen Mengen – überdeckt wird.

Es gibt auch einen engen Zusammenhang von Simplizialen Komplexen zu Polytopen:
Ein Simplex im $\mathbb{R}^n$ ist die *konvexe Hülle* einer – im Sinne von Beispiel ii) und Konzept i) in Abschnitt A – *affin unabhängigen Teilmenge* $I$ von $\mathbb{R}^n$, wobei dann notwendig $|I| \leq n+1$ ist. Insbesondere ist jedes Simplex im $\mathbb{R}^n$ ein *Polytop.*
Umgekehrt gestattet jedes Polytop $P$ in $\mathbb{R}^n$ eine *Simpliziale Zerlegung:* $P$ ist Vereinigung von – endlich vielen – Simplizes, die einen Simplizialen Komplex definieren.

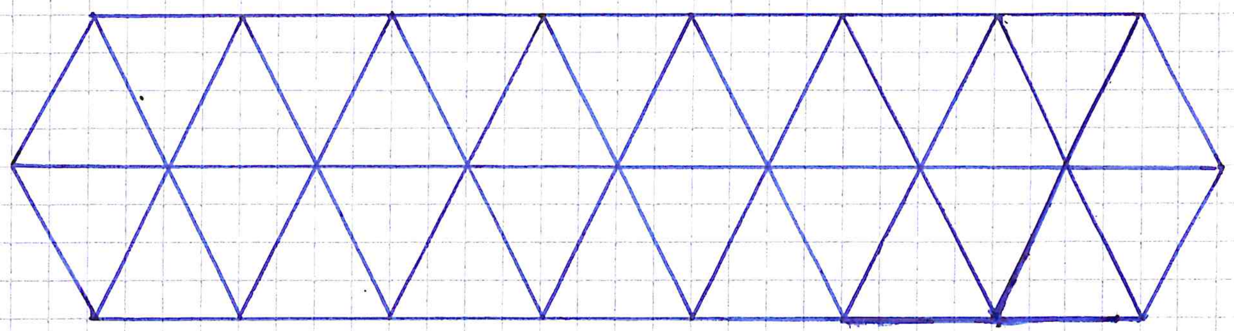
Insbesondere sind Geometrische Realisierungen Simplizialer Komplexe in der Geometrie und der Topologie wichtig:
Ist ein Topologischer Raum homöomorph zu einer solchen Geometrischen Realisierung, so heißt er *triangulierbar.*

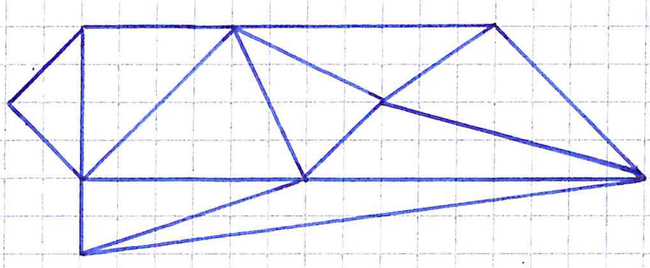
Besonders interessant sind – im Zusammenspiel von Gruppentheorie und Geometrie – Simpliziale Komplexe mit hochgradigen Symmetrieeigenschaften. Das betrifft *Coxeter-Komplexe* und *Tits'sche Gebäude.*
Die *Coxeter-Gruppen* sind die Gruppen, die auf den Coxeter-Komplexen operieren.

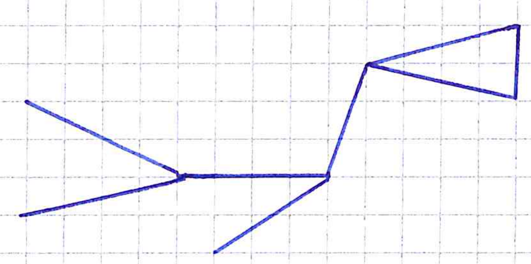
*Literatur*

*Kenneth Brown: Buildings, Springer Verlag New York, Berlin, Heidelberg 1989.*

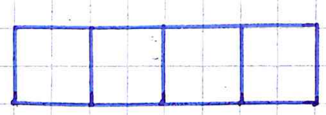
# Beispiele simplizialer Komplexe

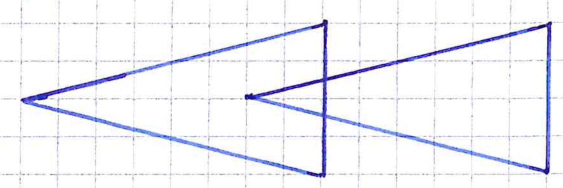


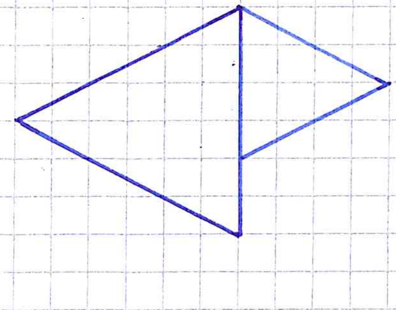


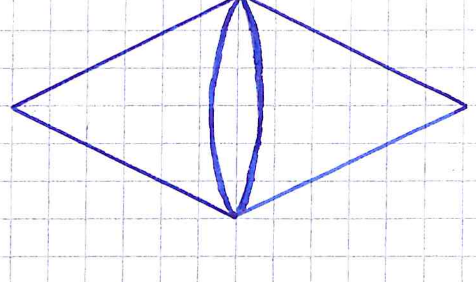


## Gegenbeispiele









## C Metrische Räume

*Definition:* Ein **Metrischer Raum** $(S, d)$ besteht aus einer nichtleeren Menge $S$ und einer Abbildung $d : S \times S \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$(M1)$ Für alle $x, y \in S$ gilt $d(x, y) \geq 0$ sowie $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

$(M2)$ $d$ ist *symmetrisch:* Für alle $x, y \in S$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.

$(M3)$ $d$ erfüllt die *Dreiecksungleichung:* Für alle $x, y, z \in S$ ist $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

*Beispiele*

i) Sei $V$ irgendein normierter Vektorraum – über den reellen Zahlen – mit der Norm $|| \ ||$, sei $\emptyset \subsetneq S \subseteq V$ und $d(v, w) := ||v - w||$ für $v, w \in S$.

ii) Sei $(V, E)$ ein zusammenhängender Graph, und für $v, w \in V$ bezeichne $d(v, w)$ die Länge eines kürzesten Weges von $v$ nach $w$, genauer:

$$d(v, w) := min\{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, \text{ es gibt } v_0, ..., v_n \in V \text{ mit } v_0 = v,\ v_n = w \\ \text{und } \{v_{i-1}, v_i\} \in E \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

iii) Ist $S$ eine beliebige nichtleere Menge, so ist die *Diskrete Metrik* $d_0$ auf $S$ definiert durch:

$$d_0(x, y) := 0, \text{ falls } x = y;\ d_0(x, y) := 1, \text{ falls } x \neq y.$$

In der Kombinatorischen Geometrie ist man primär nicht an der Topologie Metrischer Räume interessiert, sondern eher an Kombinatorischen Eigenschaften der Abstände. Dazu dient folgende

*Definition:* Es sei $(S, d)$ ein Metrischer Raum. Für $x, y \in S$ ist das *Intervall* $[x, y]$ definiert durch:

$$[x, y] := \{z \in S \,|\, d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}.$$

Eine Teilmenge $K$ von $S$ heißt *d-konvex*, wenn für alle $x, y \in K$ auch das Intervall $[x, y]$ in $K$ enthalten ist.
Die $d-$ *konvexe Hülle* einer Teilmenge $A$ von $S$ ist die kleinste $d-$ konvexe Teilmenge von $S$, die $A$ umfasst; das ist der Durchschnitt aller $d-$ konvexer Obermengen von $A$.

In Euklidischen Vektorräumen stimmt die Konvexität mit der $d-$ Konvexität überein.
In beliebigen Normierten Vektorräumen kann es aber passieren, dass die $d-$ *konvexe Hülle* einer beschränkten Menge unbeschränkt ist.

## Anhang: Konvexität im $\mathbb{R}^n$

*Definition:* Eine Teilmenge $K$ von $\mathbb{R}^n$ ist **konvex**, wenn für je zwei Punkte $p, q \in K$ auch die Verbindungsstrecke

$$\overline{pq} := \{s \cdot p + (1-s) \cdot q \,|\, 0 \leq s \leq 1\}$$

in $K$ enthalten ist.

Die **konvexe Hülle** $conv(A)$ einer Teilmenge $A$ von $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die $A$ umfasst; das ist der Durchschnitt aller konvexer Obermengen von $A$.

Alternativ kann $conv(A)$ auch wie folgt beschrieben werden:

$$conv(A) = \{\textstyle\sum_{i=0}^{m} s_i \cdot v_i \,|\, m \in \mathbb{N}_0,\ v_0, ..., v_m \in A,\ s_0, ..., s_m \geq 0,\ \sum_{i=0}^{m} s_i = 1\}.$$

Es folgen nun noch einige grundlegende Ergebnisse zur Konvexität.

**Der Satz von Caratheodory:** Sei $A$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $v \in conv(A)$ eine Teilmenge $S$ von $A$ mit höchstens $n+1$ Elementen, so dass $v \in conv(S)$ ist.

**Der Satz von Radon:** Sei $S$ eine affin abhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$; das heißt, $S$ ist in keiner affinen Basis von $\mathbb{R}^n$ enthalten. Dann gibt es eine Zerlegung $S = S_1 \cup S_2$ – mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ – und: $conv(S_1) \cap conv(S_2) \neq \emptyset$.

**Der Satz von Helly:** Es sei $m > n$, und $K_1, ..., K_m$ seien – paarweise verschiedene – konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, von denen je $n+1$ dieser Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben. Dann haben all diese Mengen $K_1, ..., K_m$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Wir heben schließlich noch folgende *Anti-Austauscheigenschaft* des konvexen Hüllenoperators hervor; die ist konträr zur symmetrischen Austauschbedingung von Hüllenoperatoren in Matroiden:

**Satz:** Es sei $A$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und es seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ mit $p \neq q$ und $q \in conv(A \cup \{p\}) \setminus conv(A)$. Dann ist $p \notin conv(A \cup \{q\})$.

*Literatur*

*R. Webster: Convexity, Oxford University Press, Oxford 1994.*