Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 12.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

28. Juni bis 2. Juli 2021

Zusammenfassung der 12.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 12.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein. Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ und einige Anwendungen der linearen Algebra in der Geometrie (**Abschnitte VII.3 und VII.4** im Skript).

Das Vektorprodukt

Definition

Für zwei Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

setzen wir

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

$a \times b$ heißt das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** von a und b.

Das Vektorprodukt

Lemma

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $a \times b = -(b \times a)$

2) $a \times b \perp a$ *und* $a \times b \perp b$

3) $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$

4) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ *und* $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

5) Sind a und b linear abhängig, so ist $a \times b = 0$.

Beweis: Siehe Lemma VII.3.2. im Skript.

Lemma

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c \quad \textbf{(Graßmann-Identität)}$$

und

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 \quad \textbf{(Jacobi-Identität)}.$$

Beweis: Übung

Das Vektorprodukt

Lemma

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ *gilt die* **Identität von Lagrange**

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle b, c \rangle \langle a, d \rangle.$$

Insbesondere gilt

$$\|a \times b\|_2^2 = \|a\|_2^2 \|b\|_2^2 - \langle a, b \rangle^2.$$

Beweis: Siehe Lemma VII.3.4. im Skript.

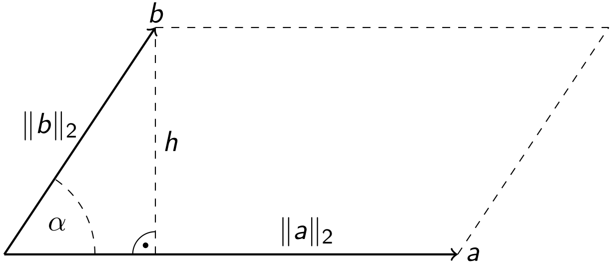
Folgerung: Für alle $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt mit $\alpha = \angle(a, b)$

$$\|a \times b\|_2 = \|a\|_2 \|b\|_2 \sin(\alpha).$$

Der Wert $\|a \times b\|_2$ ist also der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Das Vektorprodukt

Der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist $h\|a\|_2 = \|a\|_2\|b\|_2 \sin(\alpha) = \|a \times b\|_2$.



Das Vektorprodukt

Lemma

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ *linear unabhängig. Dann bilden die drei Vektoren* a, b *und* $a \times b$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^3$.
Ist ferner $c \in \mathbb{R}^3$ *mit* $c \perp a$ *und* $c \perp b$*, so existiert ein* $\alpha \in \mathbb{R}$ *mit* $c = \alpha(a \times b)$.

Beweis: Siehe Lemma VII.3.5. im Skript.

Für das Folgende sollten Sie sich die Definition eines affinen Unterraumes (Definition IV.2.7. im Skript) in Erinnerung rufen.

Definition

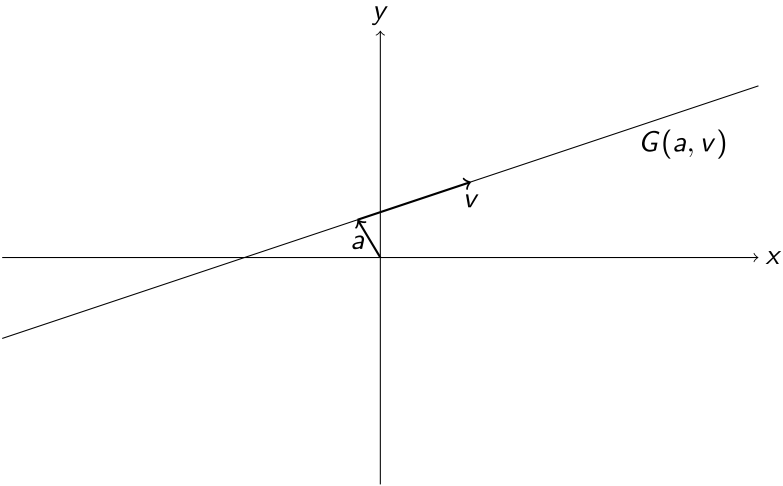
Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei

$$G(a, v) := a + \operatorname{span}\{v\} = \{a + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Man nennt $G(a, v)$ die **Gerade** mit **Stützvektor** a und **Richtungsvektor** v.

Anwendungen in der Geometrie

Die Gerade $G(a, v)$ verläuft in Richtung des Vektors v und geht durch a.



Lemma

Für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$ mit $p \neq q$ existiert genau eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p, q \in g$, nämlich $g = G(p, q-p)$.

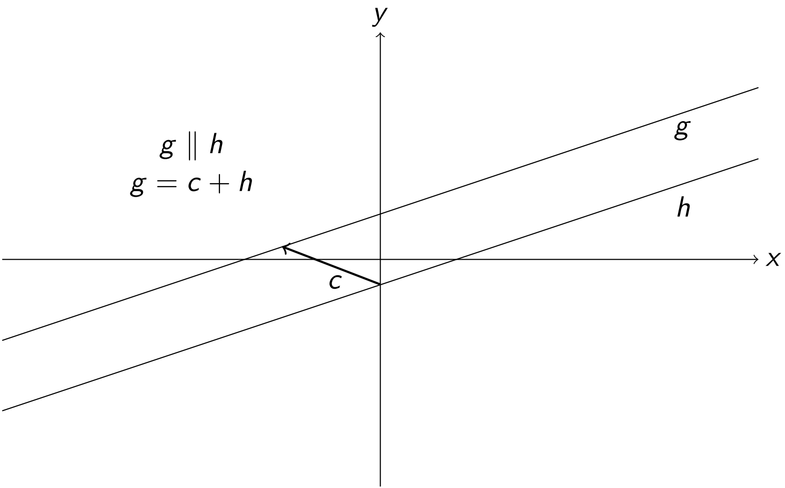
Korollar: Sind g und h Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit $g \neq h$, so hat der Schnitt $g \cap h$ höchstens ein Element.

Beweise: Übung

Definition

Zwei Geraden g und h im $\mathbb{R}^n$ heißen **parallel** (in Zeichen: $g \parallel h$), falls es ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $g = c + h$ gibt.

Anwendungen in der Geometrie



Lemma

Seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:
1) Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $g = G(a, v)$ und $h = G(b, w)$, so gilt

$$g \parallel h \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ und } w \text{ sind linear abhängig.}$$

2) Ist $g \parallel h$ und $g \neq h$, so gilt $g \cap h = \emptyset$.
3) Im Falle $n = 2$ gilt auch die Umkehrung von 2): Aus $g \cap h = \emptyset$ folgt $g \parallel h$.

Beweis: Übung

Für $n \geq 3$ gibt es natürlich sehr wohl Geraden, die nicht parallel sind, sich aber auch nicht schneiden. Solche Geraden nennt man **windschief**.

Lemma

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Geraden $g := G(a, v)$ und $h := G(b, w)$ sind windschief genau dann, wenn die drei Vektoren v, w und $a - b$ linear unabhängig sind.

Beweis: Siehe Lemma VII.4.6. im Skript.

Anwendungen in der Geometrie

Der **Abstand** eines Punktes $p \in \mathbb{R}^n$ zu einer Geraden $g \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als minimaler Abstand von p zu einem Punkt auf der Geraden:

$$d(p, g) := \min\{\|p - x\|_2 : x \in g\}.$$

Wir setzen noch

$$g_0^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp y - z \ \forall y, z \in g\}.$$

Ist $g = G(a, v)$, so ist offensichtlich $g_0^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp v\}$.

Satz: Sei $g \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
1) Es existiert genau ein $q \in g$ mit $p - q \in g_0^\perp$.
Sind $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $g = G(a, v)$, so gilt

$$q = a + \langle p - a, v \rangle \frac{v}{\|v\|_2^2}.$$

2) Für das obige q gilt $d(p, g) = \|p - q\|_2$.
(Man nennt q den **Lotfußpunkt** von p auf g).

Beweis: Siehe Satz VII.4.7. im Skript.

Auf Seite 129 im Skript finden Sie ein konkretes Rechenbeispiel.

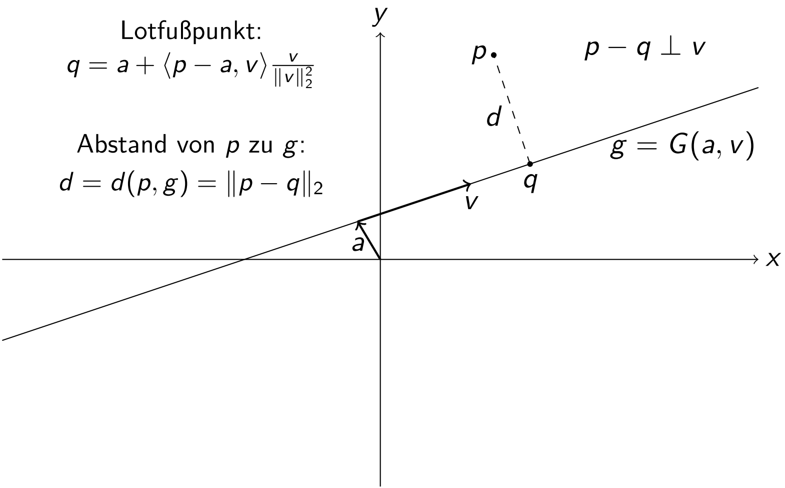
Anwendungen in der Geometrie

Lotfußpunkt:

$$q = a + \langle p - a, v \rangle \frac{v}{\|v\|_2^2}$$

Abstand von p zu g:

$$d = d(p, g) = \|p - q\|_2$$



Anwendungen in der Geometrie

Der **Abstand** zweier Geraden g und h im $\mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$d(g,h) := \min\{\|x-y\|_2 : x \in g, y \in h\}.$$

Lemma

Seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^n$. Angenommen es existieren $p \in g$ und $q \in h$ mit $p - q \in g_0^\perp \cap h_0^\perp$. Dann gilt $d(g,h) = \|p-q\|_2$.

Korollar: Seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit $g \parallel h$. Dann gilt $d(g,h) = d(p,h)$ für alle $p \in g$.

Beweise: Siehe Lemma VII.4.8. und Korollar VII.4.9. im Skript.

Anwendungen in der Geometrie

Satz: Seien g und h zwei nicht parallele Geraden im $\mathbb{R}^n$. Dann existieren eindeutig bestimmte Punkte $p \in g$ und $q \in h$ mit $p - q \in g_0^\perp \cap h_0^\perp$. Für diese gilt $d(g, h) = \|p - q\|_2$.

Satz: Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Sei $g := G(a, v)$ und sei $h := G(b, w)$. Dann gilt $v \times w \neq 0$ und

$$d(g, h) = \frac{|\langle a - b, v \times w \rangle|}{\|v \times w\|_2}.$$

Beweise: Siehe die Sätze VII.4.10. und VII.4.11. im Skript.

Ein konkretes Rechenbeispiel finden Sie auf Seite 131 im Skript.

Anwendungen in der Geometrie

Definition

Eine Teilmenge E des $\mathbb{R}^n$ heißt **Ebene**, falls es einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\dim(U) = 2$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit $E = a + U$ gibt.

M. a. W. ist eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Ebene, wenn es ein $a \in \mathbb{R}^n$ und linear unabhängige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$E = \{a + \lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

gilt.

Lemma

Angenommen $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden. Dann existiert genau eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a, b, c \in E$, nämlich $E = a + \operatorname{span}\{b - a, c - a\}$.

Beweis: Siehe Lemma VII.4.13. im Skript.

Anwendungen in der Geometrie

Satz: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) Es existieren ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\dim(U) = n - 1$ und $A = a + U$.
2) Es existieren ein $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x_0 \rangle = s\}.$$

Beweis: Siehe Satz VII.4.14. im Skript.

Man nennt x_0 einen **Normalenvektor** für A. Die Normalenvektoren sind genau die Elemente von $U^\perp \setminus \{0\}$, wobei U der zu A gehörige $(n-1)$-dimensionale Unterraum ist.
Da $U^\perp$ eindimensional ist, gibt es genau zwei Normalenvektoren mit der Norm 1 und diese sind zueinander invers. Das sind die sogenannten **Normaleneinheitsvektoren** von A.

Anwendungen in der Geometrie

Satz: Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $\|x_0\|_2 = 1$ und

$$g = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, x_0 \rangle = s\right\}.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}^2$

$$d(p, g) = |\langle p, x_0 \rangle - s|.$$

Beweis: Siehe Satz VII.4.15. im Skript.

Definition

Zwei Ebenen E_1 und E_2 im $\mathbb{R}^n$ heißen **parallel** (in Zeichen: $E_1 \parallel E_2$), falls es ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $E_1 = c + E_2$ gibt.

Bemerkungen:
1) Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind genau dann parallel, wenn die zugehörigen zweidimensionalen Unterräume U_1 und U_2 übereinstimmen.
2) Aus $E_1 \parallel E_2$ und $E_1 \neq E_2$ folgt $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
3) Sind $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und ist $a \in \mathbb{R}^3$ mit $E = a + \mathrm{span}\{v, w\}$, so sind die Normalenvektoren von E genau die Vektoren $\alpha(v \times w)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Die Normaleneinheitsvektoren von E sind $\pm(v \times w)/\|v \times w\|_2$.

Satz: Seien E_1 und E_2 Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Sei x_0 ein Normalenvektor für E_1 und y_0 ein Normalenvektor für E_2. Dann gilt:
1) $E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow x_0$ und y_0 sind linear abhängig.
2) Ist E_1 nicht parallel zu E_2, so existiert ein $c \in \mathbb{R}^3$ mit

$$E_1 \cap E_2 = c + \mathrm{span}\{x_0 \times y_0\}.$$

Der Schnitt zweier nicht paralleler Ebenen im $\mathbb{R}^3$ ist also eine Gerade in Richtung des Kreuzprodukts der Normalenvektoren der Ebenen.

Beweis: Siehe Satz VII.4.17. im Skript.

Anwendungen in der Geometrie

Der **Abstand** eines Punktes $p \in \mathbb{R}^n$ zu einer Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^n$ wird wieder definiert als

$$d(p, E) := \min\{\|p - x\|_2 : x \in E\}$$

und wir setzen

$$E_0^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp y - z \; \forall y, z \in E\}.$$

Ist U der zu E gehörige Unterraum, so ist $E_0^\perp = U^\perp$.

Satz: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ebene und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
1) Es existiert genau ein $q \in E$ mit $p - q \in E_0^\perp$.
2) Für dieses q gilt $d(p, E) = \|p - q\|_2$.
(Man nennt q den **Lotfußpunkt** von p auf E.)

Beweis: Siehe Satz VII.4.18. im Skript.

Anwendungen in der Geometrie

Satz: Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $\|x_0\|_2 = 1$ und

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x_0 \rangle = s\right\}.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}^3$

$$d(p, E) = |\langle p, x_0 \rangle - s|.$$

Beweis: Siehe Satz VII.4.19. im Skript.

Ein Rechenbeispiel hierzu findet sich auf Seite 135 im Skript.