

7. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Montag 31.5.** um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem.
Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen.
Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte). Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden
Abbildungen linear sind und begründen Sie Ihre Antworten.

1) $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F_1(x) := \begin{pmatrix} x \\ x + 1 \end{pmatrix}.$$

2) $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$F_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x + y \\ 2x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

3) $F_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte). Es bezeichne $V_{\mathbb{R}}$ den Vektorraum aller Funktio-
nen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen
Sie Ihre Antworten.

1) $F_1 : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_1(f)(x) := f(x^2 + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in V_{\mathbb{R}}.$$

2) $F_2 : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_2(f)(x) := x^3 f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in V_{\mathbb{R}}.$$

3) $F_3 : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_3(f)(x) := (f(x))^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in V_{\mathbb{R}}.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K . Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und sei U ein Unterraum von W . Zeigen Sie, dass das Urbild $F^{-1}[U]$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K . Sei $P : V \rightarrow V$ linear mit $P^2 := P \circ P = P$ (solche Abbildungen nennt man *Projektionen*). Zeigen Sie $V = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.