8. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Montag 7.6.** um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem.
Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen.
Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte (komplexe Zahlen sollten dabei wieder in der Form $a+ib$ dargestellt werden).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2-3i & i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (dabei bezeichnet A^n das n-fache Produkt von A mit sich selbst).

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $A \in M(m \times n, K)$ und alle $B \in M(n \times k, K)$ gilt $(AB)^T = B^T A^T$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusätzlich betrachten wir noch die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Wir betrachten die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ 2x + y + z \\ -x + 3y + z \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie in Aufgabe 4.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$.