Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum Kapitel 1.1 – Der Euklidische Vektorraum

1.) *Vektorräume*
Vektorräume sind in weiten Bereichen der Mathematik – vor allem in der Algebra und der Analysis – eine wichtige Struktur. Sie dienen insbesondere (aber nicht nur) dazu, geometrische Eigenschaften unseres Universums mittels Koordinaten zu untersuchen.

Für uns werden nur die Vektorräume der Gestalt

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \,|\, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

relevant sein – oder gewisse Teilmengen. Diese Vektorräume werden wegen der besonderen Bedeutung in der (Euklidischen) Geometrie auch *Euklidische Vektorräume* genannt.

Für $n = 2$ beschreibt $\mathbb{R}^2$ eine – gewöhnliche – Ebene; für $n = 3$ ist $\mathbb{R}^3$ unser Anschauungsraum.

Viele Nicht-Mathematiker verstehen – zunächst einmal – nicht, warum überhaupt Vektorräume $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 4$ betrachtet werden, zumal man sich schon einen 4-dimensionalen Raum – wenn überhaupt – nur schwer vorstellen kann. – Dabei geht es aber nicht (oder nicht nur) darum, geometrische Aspekte besser zu verstehen, sondern vor allem auch um algebraische Aspekte. Um ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen theoretisch und praktisch lösen zu können, muss – wie wir demnächst in Kapitel 1.4 sehen werden – die Theorie des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ verstanden werden. – In der Praxis stößt man sehr schnell auf lineare Gleichungssysteme mit mindestens 4 Variablen.

Die Rechenregeln in Vektorräumen (siehe Definition 1.2) sind so gemacht, dass man mit Vektoren komponentenweise rechnen kann.

2.) *Lineare Abhängigkeit und Lineare Unabhängigkeit*
Auch diese Begriffe sind sowohl in der Algebra – beim Lösen Linearer Gleichungssysteme – als auch in der Geometrie wichtig.

Betrachten wir zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$, so sind v und w genau dann linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren ein Vielfaches des anderen ist. – Mit anderen Worten bedeutet das: Die Vektoren v und w spannen eine Ebene E auf; diese besteht aus allen Vektoren der Gestalt $r \cdot v + s \cdot w$.
Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ drei paarweise verschiedene Vektoren in $\mathbb{R}^3$, so sind diese genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren u, v, w darstellen lässt.
Drei Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.
Ebenso sind vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig.

Wir werden später sehr wichtige Lineare Gleichungssysteme – die sogenannten *Homogenen Linearen Gleichungssysteme* kennen lernen, die die folgende Eigenschaft haben:

Sind u, v linear unabhängige Lösungen dieses Linearen Gleichungssystems, sind aber die Vektoren u, v, w linear abhängig, so ist auch w eine Lösung.

3.) *Basen*

Eine Teilmenge $\{v_1, ..., v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^n$, wenn jedes Element $v \in \mathbb{R}^n$ auf eindeutige Weise darstellbar ist als

$$v = s_1 \cdot v_1 + ... + s_n \cdot v_n \text{ mit geeigneten } s_1, ..., s_n \in \mathbb{R}.$$

Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ hat immer genau n Elemente.

Eine Basis ist immer auch linear unabhängig. Umgekehrt kann jede linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden.