Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum Kapitel 2.6 – Vektorwertige Funktionen in mehreren Variablen

In den Kapiteln 2.1 – 2.5 wurden "nur" *reellwertige* Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für Teilmengen D von $\mathbb{R}^n$ betrachtet. Gegenüber früher ist also dahingehend eine Verallgemeinerung vorgenommen worden, dass der *Definitionsbereich* von f nicht mehr eine Teilmenge der reellen Zahlen, sondern eine Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist. Der *Wertebereich* ist aber – bisher – eine Teilmenge der reellen Zahlen geblieben.
Auch hinsichtlich des Wertebereichs sollen nun die reellen Zahlen durch Vektoren ersetzt werden. Für $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kann eine vektorwertige Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ wie folgt geschrieben werden:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ . \\ . \\ . \\ f^m(x) \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $f^1, ..., f^m : D \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen – auf dem gleichen Definitionsbereich D.

Es liegt nahe, zu definieren:
Solch eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig bzw. partial differenzierbar bzw. total differenzierbar, wenn alle *Komponentenfunktionen* $f^1, ..., f^m : D \to \mathbb{R}$ die entsprechende Eigenschaft haben; siehe Definition 2.24.
Man beachte aber: Zur Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Funktionen $f^1, ..., f^m$ reicht es *nicht*, dass jede Funktion der Gestalt $x \mapsto f^i(x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, .., x_n)$ für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$ stetig bzw. differenzierbar ist; siehe dazu die Beispiele 2.13 – 2.15.

Die *Berechnung* der totalen Ableitung einer vektorwertigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ wie oben wird auf die Berechnung der Gradienten der Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_m$ zurückgeführt; wir setzen, falls f in $x \in D$ differenzierbar ist:

$$df(x) := \begin{pmatrix} df^1(x) \\ df^2(x) \\ . \\ . \\ . \\ df^m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigtriangledown f^1(x) \\ . \\ . \\ . \\ \bigtriangledown f^m(x) \end{pmatrix} = (\tfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(x))^{1 \le i \le m}_{1 \le j \le n}.$$

Diese $m \times n$-Matrix heißt auch **Jacobi-Matrix**; siehe Definition 2.25.

Durch die Rückführung der totalen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ auf die totale Differenzierbarkeit der m Komponentenfunktionen folgt direkt aus Definition 2.18 – der totalen Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen – auch Satz 2.12, der nun auch wie folgt formuliert werden kann:

Für $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in einem inneren Punkt x von D mit Differential $df(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ genau dann, wenn gilt:

$$lim_{||v|| \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - df(x) \bullet v}{||v||} = 0.$$

In Beispiel 2.25 wird das einfache, aber wichtige Beispiel behandelt, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist und daher durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden kann:
Ist $f(x) = A \bullet x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt – für alle x: $df(x) = A$.
Dies folgt nun direkt aus Satz 2.12; denn für $x, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$A \bullet (x + v) - A \bullet x - A \bullet v = 0.$$

Der Zähler des Quotienten in Satz 2.12 weist hier also stets den Wert 0 auf. – Das ist analog zu der Tatsache, dass bei einer affin linearen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jede Tangente mit dem gesamten Funktionsgraphen übereinstimmt.
Zusammenfassend sei hier hervorgehoben: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so stimmt die beschreibende Matrix überall mit der Jacobi-Matrix überein.

Es seien noch folgende einfache Rechenregeln vermerkt:
Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sind $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $x \in D$, und ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind auch die auf D definierten Abbildungen $f + g$ und $\alpha \cdot f$, gegeben durch $(f + g)(z) := f(z) + g(z)$ und $(\alpha \cdot f)(z) := \alpha \cdot f(z)$ in x differenzierbar, und es folgt:

$$d(f + g)(x) = df(x) + dg(x), \;\; d(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot df(x).$$

Weniger einfach, aber ebenso wichtig ist die **Kettenregel** in Satz 2.13:
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$, und ist $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $y := f(x)$, so ist auch die Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in x, und es gilt:

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \bullet df(x).$$

Diese Formel ist analog zu der gewöhnlichen Kettenregel für Funktionen, die auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert sind:
$dg(y) = dg(f(x))$ wird als äußere und $df(x)$ als innere Ableitung bezeichnet.
Man beachte – wie bei der gewöhnlichen Kettenregel – den Unterschied der Bezeichnungen $d(g \circ f)(x)$ und $dg(f(x))$:
Gemäß der Klammerung, auf die es hier wesentlich ankommt, ist $d(g \circ f)(x)$ die totale Ableitung der Komposition $g \circ f$ an der Stelle $x \in D$; dagegen ist $dg(f(x))$ die totale Ableitung der Funktion g an der Stelle $y = f(x) \in f(D)$.

Beispiele zur Kettenregel folgen im Rahmen weiterer hochgeladener Ergänzungen und Anwendungen.