8. Übungsblatt zu “Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 3.6.2021

29i) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $det(A) \neq 0$. Verifizieren Sie:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ii) Berechnen Sie die inversen Matrizen zu folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von A_2^{-1} sollte dabei das Verfahren von Beispiel 1.38 übertragen werden.

iii) Lösen Sie mittels ii) folgendes lineare Gleichungssystem:

$$x_1 + 2x_3 = 5 \;\wedge\; 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \;\wedge\; 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 21.$$

30.) Bestimmen Sie von der – symmetrischen – Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume; das sind die jeweiligen Mengen aller Eigenvektoren.

31.) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, b, so dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

mindestens einen Eigenwert hat.

32.) Es sei $n \in \mathbb{N}$, und A, M seien $(n \times n)$-Matrizen, von denen M invertierbar sei. Beweisen Sie: Ist λ ein Eigenwert der Matrix A und v ein zugehöriger Eigenvektor, so ist $M \cdot v$ ein Eigenvektor der Matrix $M \cdot A \cdot M^{-1}$ zum gleichen Eigenwert λ.

Insbesondere folgt: Die Matrizen A und $M \cdot A \cdot M^{-1}$ haben die gleichen Eigenwerte.

Hinweis: Beachten Sie die in Aufgabe 18.) zu verifizierenden Rechenregeln.