Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar Kombinatorische Geometrie

Leipzig, den 20.7.2021

Das Lemma von Sperner und der Satz von Brouwer – in beliebigen Dimensionen

Wir beweisen in dieser Note durch Vollständige Induktion das **Lemma von Sperner** – für beliebige Dimensionen $d \geq 2$ – unter Verweis auf [0] hinsichtlich des Induktionsanfangs $d = 2$. Darauf aufbauend wird der **Brouwersche Fixpunktsatz** bewiesen.

Das Lemma von Sperner:
Es sei $d \geq 2$, und es seien die kanonischen Einheitsvektoren $e_1, ..., e_{d+1} \in \mathbb{R}^{d+1}$ gegeben; dabei weist die $i-$ te Koordinate von e_i den Wert 1 auf; alle anderen Koordinaten sind 0.
Weiter sei $S := \Delta(\{e_1, ...e_{d+1}\}) := conv(\{e_1, ..., e_{d+1}\})$, und es sei eine *Simpliziale Zerlegung* von S in – endlich viele – Teilsimplizes $S_1, ..., S_m$ vorgegeben; das heißt:

S ist die Vereinigung von $S_1, ..., S_m$;
je zwei verschiedene Teilsimplizes S_i, S_j schneiden sich in einer gemeinsamen Seite – die auch leer sein kann.

Weiter "färben" wir alle Ecken dieser Simplizialen Zerlegung mit den Farben $1, ..., d, d + 1$, wobei "nur" folgende Einschränkung vorgenommen wird:
Ist $1 \leq k \leq d$, und sind $i_1, ..., i_k$ Indizes mit $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq d+1$, so enthält jede Ecke der Simplizialen Zerlegung, die in der Seite $\Delta(\{e_{i_1}, ..., e_{i_k}\})$ von S enthalten ist, eine der Farben $i_1, ..., i_k$.
Für Ecken im Inneren von S gibt es also keine Einschränkungen.
Dann ist die Anzahl aller $d-$ dimensionalen Simplizes in dieser Zerlegung, deren Ecken bijektiv mit allen $d + 1$ Farben versehen sind, ungerade.
Insbesondere gibt es mindestens ein solches Simplex.

Beweis:
Für den Induktionsanfang $d = 2$ verweisen wir auf [0].

Induktionsschritt:
Es sei $d \geq 3$ fixiert.
Laut Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass das Lemma von Sperner für $d - 1$ statt d richtig ist.
Betrachte speziell die Seite $S' := \Delta(\{e_1, ..., e_d\})$ von S. Aufgrund der Voraussetzung des Lemmas besitzt kein Punkt der gegebenen Simplizialen Zerlegung, der in S' enthalten ist, die Farbe $d + 1$.
Nach Induktionsannahme gibt es daher eine ungerade Anzahl u von $(d - 1)-$ dimensionalen Simplizes in S', deren Ecken bijektiv mit den Farben $1, ..., d$ versehen sind.

Wir betrachten nun folgenden Graphen $G = (V, E)$:
Wir fixieren für jedes $d-$ dimensionale Simplex der gegebenen Zerlegung einen Vertex im Inneren – sowie einen Vertex v_0 im Außenbereich von S. Sodann verbinden wir zwei – verschiedene – dieser markierten Punkte genau dann, wenn sie durch ein $(d-1)-$ dimensionales Simplex der gegebenen Zerlegung getrennt werden, deren Ecken – je einmal – die Farben $1, .., d$ erhalten haben. Der Vertex v_0 hat also den – ungeraden – Grad u; denn jede Facette von S, die von S' verschieden ist, enthält kein Teil-Simplex, das mit allen Farben $1, ..., d$ gefärbt ist. Die Summe der Grade der inneren Vertizes des Graphen ist daher ebenfalls ungerade.
Sind die Ecken eines $d-$ dimensionalen Simplex T bijektiv mit den Farben $1, ..., d+1$ gefärbt, so hat der zugehörige innere Vertex den Grad 1, weil es genau eine $(d - 1)-$ dimensionale Seite von T gibt, deren Ecken mit den Farben $1, ..., d$ gefärbt sind.

Ist bei der Färbung der Ecken eines $d-$ dimensionalen Simplex eine der Farben $1, ..., d$ nicht verwendet worden, so ist der zugehörige innere Punkt von G ein isolierter Vertex von G.
Der einzig verbleibende Fall ist: Bei der Färbung der Ecken des $d-$ dimensionalen Simplex T sind alle Farben $1, ..., d$ verwendet worden – und davon genau eine zwei mal. Dann hat der zugehörige innere Vertex von T den Grad 2, weil für genau zwei Facetten von T alle Farben $1, ..., d$ verwendet worden sind.
Weil die Summe der Grade der inneren Vertizes ungerade ist, muss also auch die Anzahl der $d-$ dimensionalen Simplizes der Zerlegung, deren Ecken bijektiv gefärbt sind, ungerade sein.

$\square$

Nun folgt

Der Brouwersche Fixpunktsatz:
Es sei K eine abgeschlossene Kugel im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ – für $d \geq 2$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : K \to K$ einen Fixpunkt.

Beweis:
Es sei zunächst angemerkt, dass die Behauptung auch für $d = 1$ gilt, dann aber eine direkte Folgerung aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ist.

Weiter können wir statt einer abgeschlossenen Kugel K auch das Simplex S betrachten, weil dieses homöomorph zu K ist.

Für $d = 2$ ist der Beweis auch schon in [0] erbracht; im Weiteren wird aber kein Induktionsbeweis geführt.

Für vorgegebenes $d \geq 2$ nehmen nun an: Die stetige Abbildung $f : S \to S$ habe keinen Fixpunkt.
Für $x = (x_1, ..., x_{d+1}) \in S$ schreiben wir

$$f(x_1, ..., x_{d+1}) = (f_1(x), ..., f_{d+1}(x)).$$

Aus $x, f(x) \in S$ folgt:

$$\sum_{i=1}^{d+1} x_i = \sum_{i=1}^{d+1} f_i(x) = 1.$$

Aus $f(x) \neq x$ folgt also, dass es einen kleinsten Index j gibt mit $f_j(x) < x_j$. Dem Punkt x ordnen wir nun diese Farbe j zu.
Ist speziell $x \in \Delta(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$ für ein k mit $1 \leq k \leq d$, so ist $j \in \{i_1, ..., i_k\}$, weil $x_\nu = 0$ ist, wenn ν von allen Indizes $i_1, ..., i_k$ verschieden ist.

Die so konstruierte Färbung erfüllt also die Voraussetzungen von Sperners Lemma – für jede beliebige Simpliziale Zerlegung von S.
Wir betrachten nun eine Folge $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Simplizialer Zerlegungen von S, in der die maximale Länge von Seiten in $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir dann – gemäß des Lemmas von Sperner – ein Simplex T_n der Zerlegung $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dessen Ecken $x_{n,1}, ..., x_{n,d+1}$ – in dieser Reihenfolge – bijektiv mit den Farben $1, ..., d+1$ gefärbt sind.
Dann gilt also für alle i mit $1 \leq i \leq d+1$:

$$f_i(x_{n,i}) \text{ ist kleiner als die } i- \text{ te Koordinate von } x_{n,i}.$$

Wenn wir $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine geeignete Teilfolge ersetzen, haben alle $d+1$ Folgen $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ – für $1 \leq i \leq d+1$ – einen gemeinsamen Grenzwert x_0.
Weil f stetig ist, folgt durch Grenzübergang, dass keine Koordinate von $f(x_0) - x_0$ positiv ist. Das widerspricht aber der Voraussetzung $f(x_0) \neq x_0$, weil x_0 und $f(x_0)$ in S enthalten sind.

$\square$

Literatur:
[0] Schubfachprinzip und doppeltes Abzählen, Seite 185 –196,
insbesondere Paragraph 6. *Sperners Lemma*, Seite 194 – 196,
im "Buch der Beweise" von Martin Aigner und Günter Ziegler,
Springer Verlag, Dritte Auflage 2009.