12. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Montag 5.7.** um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem.
Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen.
Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es sei g die Gerade durch a und b und h die Gerade durch c und d.
1) Bestimmen Sie den Abstand von p zu g.
2) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Seien

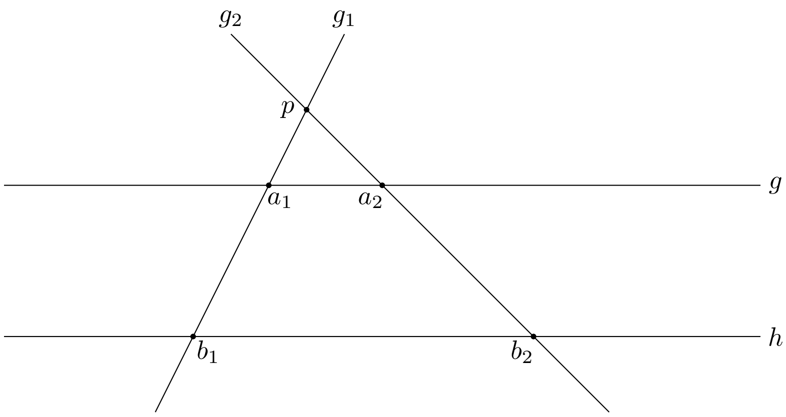
$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und sei $E = a + \operatorname{span}\{v, w\}$.
Bestimmen Sie den Abstand von p zur Ebene E.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Gegeben seien Geraden g_1, g_2, g, h im $\mathbb{R}^n$ mit $g_1 \neq g_2$ und $g \parallel h$. Weiter seien $a_1, a_2, b_1, b_2, p \in \mathbb{R}^n$ paarweise verschieden und es gelte: $p \in g_1 \cap g_2$, $a_1 \in g_1 \cap g$, $a_2 \in g_2 \cap g$, $b_1 \in g_1 \cap h$, $b_2 \in g_2 \cap h$. Siehe dazu auch die Skizze auf Seite 2.
Beweisen Sie den *Strahlensatz*:

$$\frac{\|p - a_1\|_2}{\|p - b_1\|_2} = \frac{\|a_1 - a_2\|_2}{\|b_1 - b_2\|_2} = \frac{\|p - a_2\|_2}{\|p - b_2\|_2}$$

Skizze zum Strahlensatz



Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $v_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt offensichtlich $v \perp v_\perp$ und $\|v\|_2 = \|v_\perp\|_2$.

Gegeben seien nun $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$. Wir setzen

$$M_{a,b} = \frac{a+b}{2} + \operatorname{span}\{(b-a)_\perp\}.$$

Man nennt die Gerade $M_{a,b}$ die *Mittelsenkrechte* von a und b, denn sie verläuft durch den Mittelpunkt $(a+b)/2$ in der Richtung senkrecht zum Verbindungsvektor $b-a$ (siehe die Skizze auf Seite 3).

Zeigen Sie:

$$M_{a,b} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|a-p\|_2 = \|b-p\|_2\},$$

d. h. die Mittelsenkrechte besteht genau aus jenen Punkten, die zu a denselben Abstand haben wie zu b.

Mittelsenkrechte von a und b