Probeklausur Lineare Algebra

In der echten Klausur gelten die folgenden Bedingungen: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es können maximal 20 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist ab 10 Punkten bestanden, ab 19 Punkten gibt es eine 1,0. Rechenwege und Begründungen sind stets mit anzugeben.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(1323, 966)$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 & -1 & 3x \\ 2x & 1+x & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus sämtliche $x \in \mathbb{R}^4$ mit $Ax = 0$.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch die drei Vektoren

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_2 \\ u_2 &= v_1 - v_3 \\ u_3 &= v_1 + v_2 + v_3 \end{aligned}$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$.
Zeigen Sie, dass dann auch $W = F[U_1] \oplus F[U_2]$ gilt.