Lösungen Übung 2

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Summenformeln mittels vollständiger Induktion.

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:
1) Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 1.
Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1) + n + 1\right)$$
$$= \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3).$$

2) Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 1.
Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{1}{4}n^2 + n + 1\right)(n+1)^2$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 2n$ teilbar durch 3.

Lösung:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $n^3 + 2n = 3$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \mid n^3 + 2n$.
Es gilt

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n+1)(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist n^3+2n teilbar durch 3 und $3(n^2+n+1)$ ist offensichtlich ebenfalls durch 3 teilbar. Also ist auch die Summe der beiden Zahlen durch 3 teilbar. Das zeigt die Behauptung für $n + 1$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich $1 + x$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x.$$

Dann gilt (wegen $1 + x \geq 0$)

$$(1 + x)^{n+1} \leq (1 + x)(1 + (2^n - 1)x) = 1 + (2^n - 1)x + x + (2^n - 1)x^2$$
$$= 1 + 2^n x + (2^n - 1)x^2.$$

Wegen $0 \leq x \leq 1$ ist $x^2 \leq x$ und daher folgt

$$(1 + x)^{n+1} \leq 1 + 2^n x + (2^n - 1)x = 1 + (2^{n+1} - 1)x.$$