Lösungen Übung 10

Aufgabe 1 (2 Punkte pro Teilaufgabe)**.** Berechnen Sie die folgenden Determinanten. Komplexe Zahlen sollten dabei wieder in der Form $a+ib$ dargestellt werden.

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 2 & i & 1+i \\ -1 & 2i & 2 \\ 2-i & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösung: Wir entwickeln die Determinanten jeweils nach der ersten Zeile.
a) Es gilt:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 28 + 9 + 33 = 70$$

b) Es gilt:

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 116 + 68 + 45 = 229$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & i & 1+i \\ -1 & 2i & 2 \\ 2-i & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2i & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2-i & 3 \end{vmatrix} + (1+i) \begin{vmatrix} -1 & 2i \\ 2-i & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12i - 4 - i(-7+2i) + (1+i)(-3-4i) \\ &= 19i - 2 - 3 - 4i - 3i + 4 = -1 + 12i \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Lösung: Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile liefert:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 64 + 104 - 96 + 33 = -21 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$ für die die folgenden drei Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir setzen

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ x & x^2 & 2 \\ 1 & 3 & 2x \end{vmatrix}$$

und bemerken, dass die drei Vektoren genau dann linear unabhängig sind, wenn $D(x) \neq 0$ gilt.
Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile liefert:

$$\begin{aligned} D(x) &= \begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ 3 & 2x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2x^3 - 6 - x(2x^2 - 2) - (3x - x^2) = x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$D(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \text{ oder } \ x = -2$$

Folglich sind die drei obigen Vektoren linear unabhängig genau dann, wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ gilt.