Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 20.5.2021

Ergänzungen und Beispiele zum Kapitel 1.7 – Determinante

Wir behandeln zunächst einige weitere Beispiele zur Berechnung von Determinanten.

I)
$$det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 8 & 1 & -2\\ 6 & 3 & -1\end{pmatrix} = -3\cdot det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix} - 2\cdot det\begin{pmatrix}8 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}$$
$$= -3\cdot(1\cdot(-1)-(-2)\cdot 3) - 2\cdot(8\cdot(-1)-(-2)\cdot 6) = -3\cdot 5 - 2\cdot 4 = -23.$$

Hier ist nach der ersten Zeile entwickelt worden.

II)
$$det\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & -1\\ -4 & 0 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 5 & -3\\ -6 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & -1\\ -4 & 0 & 7 & -2\\ -11 & 0 & 13 & -3\\ -6 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$$
$$= 1\cdot det\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -4 & 7 & -2\\ -11 & 13 & -3\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 13 & -4\\ -11 & 13 & -3\end{pmatrix}$$
$$= 2\cdot det\begin{pmatrix}13 & -4\\ 13 & -3\end{pmatrix} - 11\cdot det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 13 & -4\end{pmatrix}$$
$$= 2\cdot 13\cdot det\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix} - 11\cdot(-12+13) = 26\cdot(-3+4) - 11 = 15.$$

Hier ist zunächst das Doppelte der letzten Zeile zur dritten Zeile addiert worden. Dadurch wird erreicht, dass die zweite Spalte nur noch einen Koeffizienten aufweist, der von 0 verschieden ist. Sodann liegt es also nahe, nach der zweiten Spalte zu entwickeln.
Anschließend wird das Doppelte der ersten Zeile zur zweiten Zeile addiert und schließlich nach der ersten Spalte entwickelt.
Bei der ersten auftretenden 2×2-Matrix kann dann noch die Zahl 13 aus der ersten Spalte ausgeklammert werden.

III) Nun seien a, b, c *beliebige* reelle Zahlen. Wir berechnen:

$$det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}b-a & c-a\\ b^2-a^2 & c^2-a^2\end{pmatrix}$$
$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot det\begin{pmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{pmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot((c+a)-(b+a))$$
$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b).$$

Hier wurde zunächst die erste Spalte sowohl von der zweiten Spalte als auch von der dritten Spalte subtrahiert. Sodann weist die erste Zeile nur noch einmal einen von 0 verschiedenen Wert auf, so dass es also nahe liegt, nach der ersten Zeile zu entwickeln.

In der dann ermittelten 2×2-Matrix kann aus der ersten Spalte noch der Faktor $b-a$ und aus der zweiten Spalte der Faktor $c-a$ ausgeklammert werden.
Das Endergebnis ist also das Produkt der 3 Differenzen $b-a$, $c-a$, $c-b$. Es ist also immer dann von 0 verschieden, wenn die drei Zahlen a, b, c paarweise verschieden sind.

Diese Determinante ist in weiten Bereichen der Mathematik sehr wichtig; sie heißt auch **Vandermonde-Determinante**.

Mit etwas mehr Aufwand kann dieses Ergebnis auf $n \times n$-Matrizen – für beliebiges n – übertragen werden. Für $n = 4$ siehe hierzu Übungsblatt 7.

Schließlich soll in dieser Notiz noch die Bedeutung der Determinante für *lineare Gleichungssysteme* herauskristallisiert werden.

Wir wissen bereits: Ist eine $n \times n$-Matrix A vom Rang n gegeben sowie ein Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^n$, so ist der – eindeutig bestimmte – Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b$$

gegeben durch

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Die inverse Matrix A^{-1} kann gemäß Satz 1.16 ermittelt werden; siehe auch den Schluss der Kommentare zu Kapitel 1.6. Das kann allerdings etwas aufwendig sein.
Der folgende Satz zeigt, wie der Lösungsvektor x mittels Determinanten berechnet werden kann:

Die Cramersche Regel:
Gegeben sei eine reguläre $n \times n$-Matrix A mit den Spaltenvektoren $A_1, ..., A_n$. Ist ferner $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, so berechnen sich die Koordinaten $x_1, ..., x_n$ des Lösungsvektors x der linearen Gleichung

$$(A_1 ... A_n) \cdot x = b$$

wie folgt:

$$x_i = \tfrac{1}{det(A)} \cdot det(A_1, ... A_{i-1}, b, A_{i+1}, ... A_n).$$

Jedes x_i ist also der Quotient zweier geeigneter Determinanten:
Im Nenner steht immer $det(A)$ – und damit ein Wert, der wegen der Invertierbarkeit von A von 0 verschieden ist.
Im Zähler wird die Determinante derjenigen Matrix gebildet, die man erhält, indem die i-te Spalte von A durch b ersetzt wird.

Beweis: Wir wissen bereits, dass das lineare Gleichungssystem wegen der Invertierbarkeit von A eindeutig lösbar ist.
Ist x der Lösungsvektor – mit den Koordinaten $x_1, ..., x_n$, so folgt:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot A_j = b.$$

Aufgrund der Eigenschaften der Determinante können wir also den Zähler in der behaupteten Formel wie folgt berechnen:

$$det(A_1, ... A_{i-1}, b, A_{i+1} ..., A_n) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n).$$

Die letzte Matrix weist aber immer dann (mindestens) zwei gleiche Spalten auf, wenn $i \neq j$ gilt: Dann steht der Spaltenvektor A_j nämlich sowohl an der i-ten Stelle als auch an der j-ten Stelle.
Weil die Determinante alternierend ist, weisen alle Ausdrücke $det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)$ für $j \neq i$ den Wert 0 auf. – Für $j = i$ ergibt sich aber genau die Determinante der Matrix A.

Somit folgt

$$det(A_1...., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n) = x_i \cdot det(A).$$

Nach Division durch $det(A)$ folgt die Behauptung.

q.e.d.

Es sei aber angemerkt, dass die Cramersche Regel eher theoretisch als beim praktischen Rechnen von Bedeutung ist. Bei der Lösung konkreter linearer Gleichungssysteme führt das Gauß'sche Eliminationsverfahren meistens schneller zum Ziel.

Allerdings ist die Cramersche Regel praktisch, wenn zwei lineare Gleichungen in zwei Variablen gegeben sind; deshalb folgt dazu noch ein

Beispiel:

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$3x_1 + 17x_2 = 7 \ \wedge \ 5x_1 + 29x_2 = -9.$$

Zunächst folgt:

$$det\begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 5 & 29 \end{pmatrix} = 3 \cdot 29 - 5 \cdot 17 = 87 - 85 = 2,$$

$$det\begin{pmatrix} 7 & 17 \\ -9 & 29 \end{pmatrix} = 7 \cdot 29 + 9 \cdot 17 = 203 + 153 = 356,$$

$$det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = -3 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = -27 - 35 = -62.$$

Die Cramersche Regel liefert also:

$$x_1 = 356 : 2 = 178, \ x_2 = -62 : 2 = -31.$$

Probe:

Es gilt tatsächlich:

$$3 \cdot 178 - 17 \cdot 31 = 534 - 527 = 7, \ \ 5 \cdot 178 - 31 \cdot 29 = 890 - 899 = -9.$$