5. Übungsblatt zu "Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 12.5.2021

17.) Berechnen Sie die folgenden Matrix-Produkte:

i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

ii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -6 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

18.) Es seien $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ sowie $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}, B, B' \in \mathbb{R}^{n\times k}$ und $C \in \mathbb{R}^{k\times l}$. Beweisen Sie:

$$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C),$$
$$A \bullet (B + B') = (A \bullet B) + (A \bullet B'),\ (A + A') \bullet B = (A \bullet B) + (A' \bullet B).$$

19.) Geben Sie – mit Begründung – zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, für die gilt: $A \bullet B \neq B \bullet A$.

20.) Beweisen Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen in Satz 1.13:
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$dim(im(\Phi)) = k - dim(kern(\Phi)).$$

Hinweis: Es sei $l = dim(kern(\Phi))$ *und* $m - l = dim(im(\Phi))$. *Weiter sei* $\{v_1, ..., v_l\}$ *eine Basis von* $kern(\Phi)$, *und* $v_{l+1}, v_{l+2}, ..., v_m$ *seien Vektoren in* $\mathbb{R}^k$, *so dass die Menge* $\{\Phi(v_{l+1}), \Phi(v_{l+2}), ..., \Phi(v_m)\}$ *eine Basis von* $im(\Phi)$ *ist. Beweisen Sie, dass dann die Menge* $\{v_1, ..., v_l, v_{l+1}, ..., v_m\}$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^k$ *ist.*