Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 1.7.2021

*Weitere Beispiele zu Extremwertaufgaben*

I.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := sin(x+y) \cdot cos(x-y)$$

sowie das – kompakte – Quadrat $Q := [0,\pi] \times [0,\pi]$.
Wir wollen zeigen, dass $f$ auf $Q$ genau eine globale Maximalstelle besitzt – und diese berechnen.

Dazu bemerken wir zunächst:

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$f(x+\pi,y) = sin(x+\pi+y) \cdot cos(x+\pi-y)$$
$$= (-1) \cdot sin(x+y) \cdot (-1) \cdot cos(x-y) = f(x,y).$$

Analog folgt stets:

$$f(x,y+\pi) = f(x,y).$$

Das bedeutet: Die Funktion $f$ ist in beiden Koordinaten periodisch; bei Addition von $\pi$ zu einer der beiden Koordinaten ändert sich der Funktionswert nicht.
Folglich wird jeder Funktionswert, den $f$ überhaupt annimmt, auch auf $Q$ angenommen.

Weiter beobachten wir zunächst:
Für $0 < x,y < \frac{\pi}{2}$ ist $0 < x+y < \pi$ und $|x-y| < \frac{\pi}{2}$ und damit $f(x,y) > 0$. $f$ nimmt also überhaupt positive Funktionswerte an.

Wir bestimmen nun zunächst lokale Maximalstellen auf $Q$.
Gibt es einen inneren Punkt $(x,y)$ von $Q$, der lokale Maximalstelle ist, so muss folgen:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(x+y) \cdot cos(x-y) - sin(x+y) \cdot sin(x-y) \\ cos(x+y) \cdot cos(x-y) + sin(x+y) \cdot sin(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt weiter:

$$cos(x+y) \cdot cos(x-y) - sin(x+y) \cdot sin(x-y) = 0$$
$$\wedge\ cos(x+y) \cdot cos(x-y) + sin(x+y) \cdot sin(x-y) = 0.$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert:

$$cos(x+y) \cdot cos(x-y) = 0 \ \wedge\ sin(x+y) \cdot sin(x-y) = 0.$$

Das bedeutet: In den beiden letzten Gleichungen muss jeweils ein Faktor auf der linken Seite den Wert 0 annehmen. – Das können aber *nicht* die Faktoren $cos(x-y)$ und $sin(x+y)$ sein; denn sonst wäre $f(x,y) = 0$, und wir haben bereits festgestellt, dass $f$ überhaupt positive Werte annimmt. Also folgt:

$$cos(x+y) = 0 \ \wedge\ sin(x-y) = 0.$$

Weil $(x,y)$ ein innerer Punkt von $Q$ sein soll, ist $-\pi < x-y < \pi$. Im offenen Intervall $]-\pi,\pi[$ ist aber 0 die einzige Nullstelle der Sinusfunktion; damit folgt $x-y=0$ und folglich $x=y$.
Weiter erhalten wir also $cos(2x) = 0$. Wegen $0 < x < \pi$ ist das nur möglich, wenn $2x = \frac{\pi}{2}$ oder $2x = \frac{3\pi}{2}$ ist; das bedeutet:

$$x = y = \frac{\pi}{4} \ \vee\ x = y = \frac{3\pi}{4}.$$

Die kritischen Punkte von $f$ im Innern von $Q$ sind also $P_1 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ und $P_2 = (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

Wir berechnen nun die zugehörigen Funktionswerte:

$$f(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}) = sin(\tfrac{\pi}{2}) \cdot cos(0) = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$f(\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}) = sin(\tfrac{3\pi}{2}) \cdot cos(0) = -1.$$

Der kritische Punkt $P_2$ kommt also nicht als Maximalstelle von $f$ in Betracht, wohl aber $P_1$. Dazu analysieren wir schließlich noch die Punkte auf dem Rand von $Q$:

Für alle $x \in [0, \pi]$ ist $f(x, 0) = sin(x) \cdot cos(x) < 1$, weil $|sin(x)|$ und $|cos(x)|$ nicht gleichzeitig den Wert 1 annehmen können.

Analog folgt für alle $y \in [0, \pi]$:
$$f(0, y) = sin(y) \cdot cos(-y) = sin(y) \cdot cos(y) < 1.$$

Zusammen mit der bereits untersuchten Periodizität der Funktion $f$ folgt:
Alle Funktionswerte von $f$ auf den Randpunkten von $Q$ sind kleiner als $f(P_1) = 1$. Die stetige Funktion $f$ muss aber irgendwo auf der kompakten Menge $Q$ einen maximalen Funktionswert annehmen. Weil, wie gerade gesehen, die Randpunkte von $Q$ dafür nicht in Betracht kommen, kann das nur in dem kritischen Punkt $P_1 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ sein.

Das gerade vorgestellte Kompaktheitsargument – zusammen mit dem Vergleich der Funktionswerte $f(P_1) = 1$, $f(P_2) = -1$ und $f(A) \in ]-1, 1[$ für die Randpunkte $A$ von $Q$ – zeigt also, dass die Hesse-Matrix nicht benötigt wird, um $P_1$ als die einizige globale Maximalstelle in $Q$ zu ermitteln.

II) Wir betrachten nun noch die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x, y) := x^2 - y^2.$$

Wir ermitteln hier die kritischen Punkte. Wir erhalten für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Folglich ist der Nullpunkt der einzige kritische Punkt.
Weiter folgt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_{xx} g(x, y) = 2,\ \partial_{xy} g(x, y) = \partial_{yx} g(x, y) = 0,\ \partial_{yy} g(x, y) = -2.$$

Die Hesse-Matrix ist also – in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ – gegeben durch

$$Hess\, g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Diagonalmatrix ist indefinit, weil sie den positiven Eigenwert 2 und den negativen Eigenwert $-2$ hat.
Die Funktion $g$ besitzt somit weder ein lokales, noch ein globales Extremum. Weil $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt ist, befindet sich dort eine *Sattelstelle*.
Der Graph der Funktion $g$ ist die Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}.$$

Diese Fläche ist ein *hyperbolisches Paraboloid*; eine Figur dazu befindet sich im Schaukasten vor dem Felix-Klein-Hörsaal.
Der Nullpunkt $(0, 0, 0)$ ist der *Sattelpunkt* dieser Fläche. Durchschnitte von $F$ mit horizontalen Ebenen – die also die $z$- Achse senkrecht schneiden – sind *Hyperbeln*.
Durchschnitte von $F$ mit vertikalen Ebenen sind *Parabeln*.