Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 1.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

12. bis 16. April 2021

Zusammenfassung der 1.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 1.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein.
Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

Die erste Woche soll zur Wiederholung der notwendigen Grundlagen über Mengen und Abbildungen dienen. Das ist **Kapitel I im Skript**.
Die hier nicht erläuterten Logiksymbole finden Sie im Anhang des Skriptes.

Grundlegendes über Mengen

Eine **Menge** A ist die Zusammenfassung gewisser mathematischer Objekte zu einem neuen mathematischen Objekt.
Die Ausgangsobjekte x heißen die **Elemente** der Menge.
Schreibweise: $x \in A$

Notationen:
$\{x : x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}$ bezeichnet die Menge aller x mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.
Für eine vorgegebene Menge M bezeichnet
$\{x \in M : x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}$ die Menge aller Elemente x aus M mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Grundlegendes über Mengen

Beispiele:
1) $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge. Sie hat keine Elemente.
2) $\{a\}$ ist die Menge, deren einziges Element a ist.
3) $\{a, b\}$ ist die Menge mit den beiden Elementen a und b.
Entsprechend für $\{a, b, c\}$ etc.
4) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sollen die Mengen aller natürlichen/ganzen/rationalen/reellen Zahlen bezeichnen.
5) $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich 0 sind.
6) $\{n \in \mathbb{N} : \text{es existiert ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k\}$ ist die Menge aller geraden Zahlen.
7) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q}\right\}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, deren Quadrat rational ist.

Grundlegendes über Mengen

Definition

Sind A und B zwei Mengen, so heißt A eine **Teilmenge** von B (in Zeichen: $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Wichtige Bemerkung: $A = B \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A)$

Beispiel: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Grundlegendes über Mengen

Definition

Für zwei Mengen A und B definieren wir

1) die **Vereinigung** von A und B als

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

2) den **Durchschnitt** von A und B als

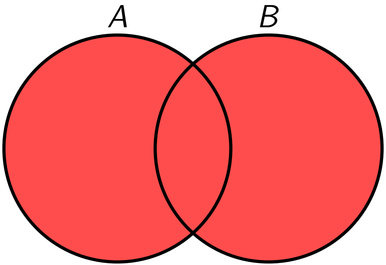
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\},$$

3) die **Differenzmenge** von A und B als

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

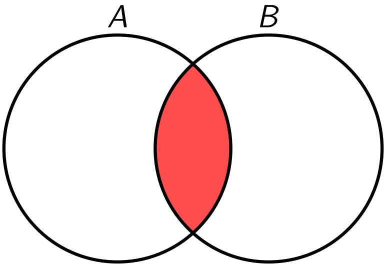
Diese Definitionen werden auf den folgenden Seiten durch sogenannte **Venn-Diagramme** veranschaulicht.

Grundlegendes über Mengen



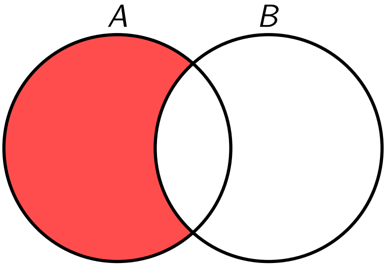
Der rote Bereich ist $A \cup B$.

Grundlegendes über Mengen



Der rote Bereich ist $A \cap B$.

Grundlegendes über Mengen



Der rote Bereich ist $A \setminus B$.

Für $\cup$ und $\cap$ gelten die folgenden Rechenregeln.

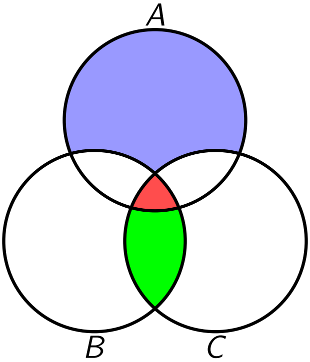
Lemma

Für alle Mengen A, B und C gilt:

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(iii) $A \cup B = B \cup A$
(iv) $A \cap B = B \cap A$
(v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Beweis: Siehe Skript, Lemma I.1.4.

Hier nochmal ein etwas komplizierteres Venn-Diagramm mit drei Mengen:



Der blaue Bereich ist $A \setminus (B \cup C)$, der rote Bereich ist $A \cap B \cap C$, der grüne Bereich ist $(B \cap C) \setminus A$.

Definition

Für je zwei mathematische Objekte a und b definieren wir das **geordnete Paar** (a, b) durch $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
Für Mengen A und B heißt

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

das **kartesische Produkt** von A und B.

Lemma

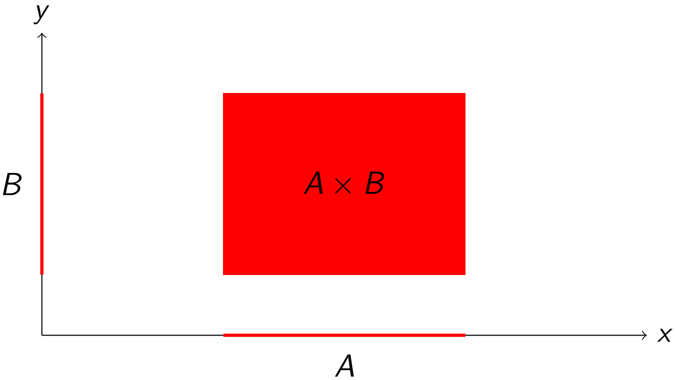
Für alle a, b, c, d gilt:

$$(a, b) = (c, d) \;\Leftrightarrow\; a = c \text{ und } b = d.$$

Beweis: Siehe Skript, Lemma I.1.7.

Grundlegendes über Mengen

Das folgende Bild zeigt ein Rechteck als kartesisches Produkt zweier Intervalle.



Grundlegendes über Abbildungen

Definition

Seien A und B zwei Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** von A nach B ist eine Zuordnungsvorschrift $f : A \to B$, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuweist.
A heißt der **Definitionsbereich** und B der **Wertebereich** der Funktion.

Beispiele:
1) Konstante Abbildung: $f : A \to B$ mit $f(a) := b_0$ für alle $a \in A$ und festes $b_0 \in B$.
2) Identische Abbildung: $\mathrm{id}_A : A \to A$ mit $\mathrm{id}_A(a) := a$ für alle $a \in A$.

Beispiele (Fortsetzung):
3) $f : \{1,2,3\} \to \{2,3,4\}$ definiert durch $f(a) := a + 1$ für $a \in \{1,2,3\}$.
4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $f(n) := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0, \\ x^3 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Definition

Seien A und B zwei Mengen und sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann ist der **Graph** von f definiert durch

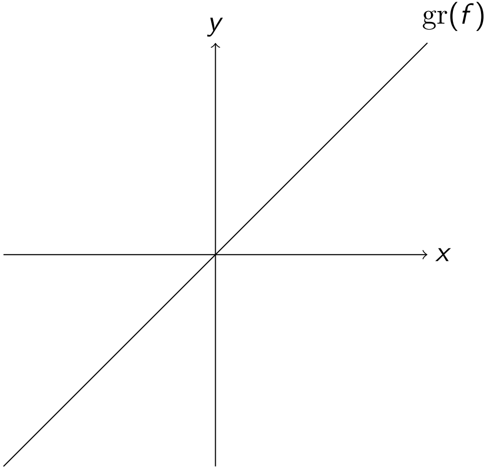
$$\mathrm{gr}(f) := \{(a, f(a)) : a \in A\}.$$

Das **Bild** von f ist definiert durch

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(a) : a \in A\}.$$

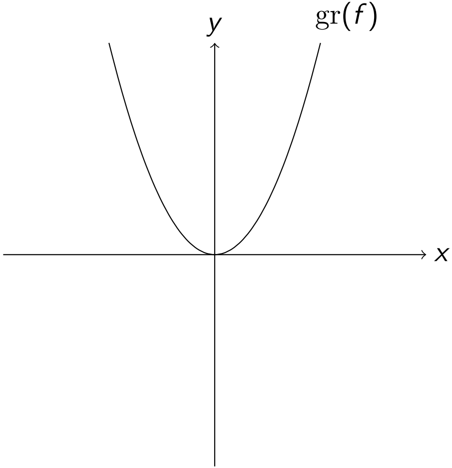
Grundlegendes über Abbildungen

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



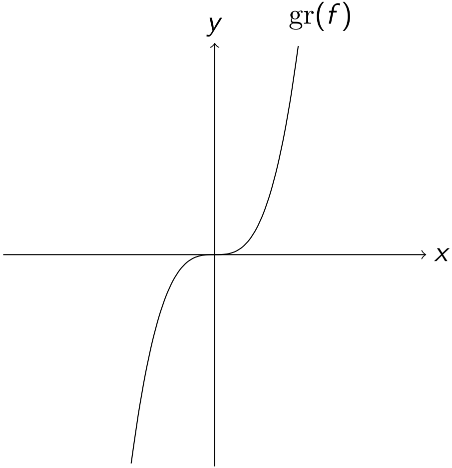
Grundlegendes über Abbildungen

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



Grundlegendes über Abbildungen

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



Grundlegendes über Abbildungen

Definition

Gegeben seien Mengen A, B, C und Abbildungen $g : A \to B$ und $f : B \to C$. Dann ist die **Verkettung** von f und g definiert durch $f \circ g : A \to C$ mit

$$(f \circ g)(a) := f(g(a)) \quad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiele:
1) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(n) := 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(q) := q^2$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.
Dann ist $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ gegeben durch
$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = 1/n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele (Fortsetzung):
2) $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) := y^2 + 3y + 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
Dann ist $f \circ g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x + 3\sqrt{x} + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$.

3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) := \sqrt{y^2 + 1}$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
Dann ist $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x+1)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Grundlegendes über Abbildungen

Definition

Seien A und B zwei Mengen und sei $f : A \to B$ eine Abbildung.
(i) f heißt **injektiv**, falls für alle Elemente $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ auch $f(a_1) \neq f(a_2)$ gilt.
(ii) f heißt **surjektiv**, falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.
(iii) f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so wird die **Umkehrabbildung** (oder **Umkehrfunktion**) $f^{-1} : B \to A$ folgendermaßen erklärt: Für alle $b \in B$ ist $f^{-1}(b)$ dasjenige Element von A mit $f(f^{-1}(b)) = b$.

Beispiele:

1) Für jede Menge A ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_A : A \to A$ bijektiv mit $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

2) Die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4\}$ mit $f(a) := a + 1$ ist bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : \{2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ ist gegeben durch $f^{-1}(b) = b - 1$.

3) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist nicht injektiv (da z. B. $f(-1) = f(1)$) und auch nicht surjektiv (denn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

4) Dagegen ist die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) := x^2$ bijektiv und für die Umkehrabbildung gilt $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ für alle $y \in \mathbb{R}_0^+$.