Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum Kapitel 1.8 – Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Multipliziert man eine – quadratische – $n \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ergibt sich erneut ein Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$, der aber im allgemeinen kein Vielfaches von v ist. – Falls dem doch so ist, wird v ein *Eigenvektor* zu der Matrix A genannt; das heißt: $A \cdot v$ ist ein skalares Vielfaches des – eigenen – Vektors v. Es gibt dann also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$. – Dabei ist λ übrigens eindeutig bestimmt, wenn v nicht der Nullvektor ist. Diese Zahl λ heißt dann auch ein *Eigenwert* der Matrix A.
Aufgrund theoretischer Erwägungen wird der Nullvektor nur dann Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ genannt, wenn diese Zahl λ auch noch Eigenwert zu mindestens einem Vektor ist, der vom Nullvektor verschieden ist.

Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren ist in weiten Bereichen der Mathematik und deren Anwendungen – insbesondere in der Physik – sehr wichtig, und zwar beispielsweise in der Theorie der Schwingungen. Dabei sind die Eigenwerte gewisse Frequenzen.

Es stellt sich die Frage nach der Berechnung von Eigenwerten und den zugehörigen Eigenvektoren. – Im vorliegenden Abschnitt wird die Berechnung von Eigenwerten zurückgeführt auf die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms – und zwar des *charakteristischen Polynoms*

$$P(\lambda) = P_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E_n)$$

zu der gegebenen $n \times n$-Matrix A. Der – einfache und wichtige – Zusammenhang sei hier noch einmal begründet; es gilt folgende Kette von Äquivalenzumformungen:

$$\begin{gathered} \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \\ \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ mit } (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v = 0 \\ \Leftrightarrow kern(A - \lambda \cdot E_n) \neq \{0\} \\ \Leftrightarrow det(A - \lambda \cdot E_n) = 0. \end{gathered}$$

Hat man die Eigenwerte – als Nullstellen dieses Polynoms $P(\lambda)$ – berechnet, so ergeben sich die zugehörigen Eigenvektoren als Lösungsmenge eines – homogenen – linearen Gleichungssystems.

In der Mitschrift folgt noch eine interessante Anwendung für die sogenannte *Fibonacci-Folge*, die wiederum enge Beziehungen zum *Goldenen Schnitt* aufweist.

Eine Strecke wird im *Goldenen Schnitt* geteilt, wenn das Verhältnis der Länge der größeren Teilstrecke zur kleineren mit dem Verhältnis der Gesamtlänge der gegebenen Strecke zur Länge der größeren Teilstrecke übereinstimmt: Dieses Verhältnis ist genau die auf Seite 122 definierte Zahl

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}).$$

Auf den Aktienmärkten spielen die Fibonacci-Zahlen bei Korrekturbewegungen eine markante Rolle.

In den Ergänzungen sollen weitere Beispiele und Anwendungen zu Eigenwertproblemen – auch mit Bezügen zur Geometrie – folgen.