Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 31.5.2021

Transponierte Matrizen, Symmetrische Matrizen und Eigenwerte

Ist eine Matrix

$$M = (M_i^j)_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times k}$$

gegeben, so ist die zugehörige *transponierte Matrix* M^T gegeben durch

$$M^T = (M_j^i)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k\times n}.$$

Die Matrix M^T entsteht also aus M dadurch, dass die Zeilen von M in die Spalten von M^T übergehen – und umgekehrt.
Insbesondere folgt: $(M^T)^T = M$.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 9 & 5 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 11 \\ -5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ für alle } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Eine – quadratische – Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $M = M^T$ ist.

Die Matrix im obigen letzten Beispiel ist also genau dann symmetrisch, wenn $b = c$ ist.

Es gilt folgender – nicht ganz trivialer

Satz I: Für jede quadratische Matrix M gilt:

$$det(M) = det(M^T).$$

Diese Formel – die wir im Detail nicht beweisen – wird aber plausibel, wenn man bedenkt, dass Determinanten – gemäß der verschiedenen Variationen des Laplace'schen Entwicklungssatzes – sowohl nach ihren Zeilen als auch nach ihren Spalten entwickelt werden lönnen.

Insbesondere folgt, dass alle Rechenregeln für Matrizen, die ihre Spalten betreffen, analog auch für die Zeilen gelten. Daher ist die Determinante nicht nur hinsichtlich der Spaltenvektoren, sondern auch hinsichtlich der Zeilenvektoren multilinear und alternierend.
Es gilt also folgender

Satz II: Die Determinante einer quadratischen Matrix M ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert wird.
Wird eine Zeile mit einer reellen Zahl r multipliziert, so ist auch die Determinante mit r zu multiplizieren.
Stimmen mindestens zwei Zeilen von M überein, so ist $det(M) = 0$.

Im folgenden wenden wir uns den Eigenwerten und Eigenvektoren – insbesondere, aber nicht nur – von symmetrischen Matrizen zu; da folgen nun noch einige Ergebnisse ohne Beweise.

Satz III: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – mit dem zugehörigen charakteristischem Polynom

$$P(\lambda) = det(A - \lambda E_n).$$

Es seien $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die – paarweise verschiedenen – reellen Eigenwerte von A, wobei auch $k = 0$ möglich ist, wenn es nämlich gar keinen reellen Eigenwert gibt.
Dann gilt:

i) Es existieren – eindeutig bestimmte – natürliche Zahlen $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ und ein eindeutig bestimmtes Polynom Q ohne reelle Nullstelle, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(\lambda) = Q(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Dabei kann (muss aber nicht) Q eines der beiden konstanten Polynome $Q \equiv 1$ oder $Q \equiv -1$ sein. In dem Fall kann also das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ vollständig faktorisiert werden.

ii) Für alle i mit $1 \leq i \leq k$ ist die Menge E_{λ_i} der zum Eigenwert λ_i gehörigen Eigenvektoren ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, für dessen Dimension d_i gilt:

$$1 \leq d_i \leq m_i \text{ für } 1 \leq i \leq k.$$

Insbesondere folgt also:

$$k \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n.$$

Anmerkung: Mit den Bezeichnungen des letzten Satzes heißt jede Zahl m_i für $1 \leq i \leq k$ die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ_i, wogegen d_i seine *geometrische Vielfachheit* bezeichnet.
Die algebraische Vielfachheit ist also die Vielfachheit der Nullstelle des charakteristischen Polynoms; die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraumes E_{λ_i}.

Schließlich notieren wir noch das folgende – nichttriviale –Ergebnis, das an die Ausführungen zu Beginn dieser Rubrik anschließt:

Satz IV: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *symmetrische* Matrix. Dann zerfällt das zugehörige charakteristische Polynom $P(\lambda)$ vollständig in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert stimmt seine algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit überein.
Mit den Notationen in Satz III gilt also:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Für den Spezialfall $n = 2$ soll Satz IV in Aufgabe 28.) bewiesen werden.
Für größeres n wird zum Beweis wesentlich mehr Theorie benötigt, die den Rahmen unserer Lehrveranstaltung erheblich übersteigt.