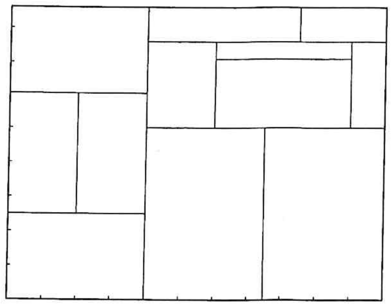
Wenn man Rechtecke zerlegt

Kapitel 26

Es gibt mathematische Sätze mit einer eigenartigen Charakteristik: Die Aussage des Satzes ist elementar und leicht zu verstehen, aber ihn zu beweisen kann mühsam sein — außer man öffnet eine geradezu magische Tür, und alles wird klar und einfach. Ein Beispiel ist das folgende Resultat, das auf Nicolaas de Bruijn zurückgeht.

Satz. *Wenn ein Rechteck in kleine Rechtecke zerlegt wird, die alle mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge haben, so weist auch das große Rechteck mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge auf.*



Das große Rechteck hat Seitenlängen 11 und 8.5.

Unter einer Zerlegung verstehen wir eine Bedeckung des großen Rechtecks R mit Rechtecken $T_1, \ldots, T_m$, die paarweise leeren Schnitt im Inneren haben, wie im Beispiel am Rand.

De Bruijn bewies eigentlich das folgende Resultat über Zerlegungen eines $c \times d$ Rechtecks in kleine $a \times b$ Rechtecke: Sind a, b, c, d ganze Zahlen, so muss a wie b mindestens eine der Zahlen c oder d teilen. Dies wird sofort durch die allgemeinere Aussage von oben impliziert, indem man die Figur mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ (bzw. $\frac{1}{b}$) verkleinert. Jedes kleine Rechteck hat dann eine Seitenlänge gleich 1, also muss $\frac{c}{a}$ oder $\frac{d}{a}$ eine ganze Zahl sein.

Wahrscheinlich wird fast jeder zunächst Induktion versuchen über die Anzahl der kleinen Rechtecke. Das funktioniert tatsächlich, aber die Induktion muss sehr sorgfältig durchgeführt werden, und es gibt durchaus elegantere Möglichkeiten. Stan Wagon beschreibt in einer lesenswerten Arbeit nicht weniger als vierzehn Beweise, von denen wir drei ausgewählt haben, die alle ohne Induktion auskommen. Der erste, der im Wesentlichen auf de Bruijn selber zurückgeht, verwendet einen sehr cleveren Trick aus der Analysis. Der zweite Beweis von Richard Rochberg und Sherman Stein ist eine diskrete Version des ersten und macht diesen noch einfacher. Die Krone gebührt aber wahrscheinlich dem dritten Beweis, der von Mike Paterson vorgeschlagen wurde: Er ist nichts weiter als doppeltes Abzählen und nur ein paar Zeilen lang.

Im Folgenden nehmen wir an, dass das große Rechteck R parallel zu den x, y-Achsen mit $(0, 0)$ in der linken unteren Ecke platziert ist. Die kleineren Rechtecke T_i haben ihre Seiten ebenfalls parallel zu den Achsen.

■ **Erster Beweis.** Es sei T irgendein Rechteck in der Ebene, wobei T sich auf der x-Achse von a nach b erstreckt und auf der y-Achse von c nach d.

Hier ist de Bruijns Trick. Man betrachte das Doppelintegral über T,

$$\int_c^d \int_a^b e^{2\pi i(x+y)} dx\, dy. \tag{1}$$

Da

$$\int_c^d \int_a^b e^{2\pi i(x+y)} dx\, dy \;=\; \int_a^b e^{2\pi i x} dx \cdot \int_c^d e^{2\pi i y} dy$$

gilt, folgt, dass das Integral in (1) dann und nur dann gleich 0 ist, wenn mindestens einer der Ausdrücke $\int_a^b e^{2\pi i x} dx$ oder $\int_c^d e^{2\pi i y} dy$ gleich 0 ist. Wir werden zeigen, dass

$$\int_a^b e^{2\pi i x} dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \text{ ist eine ganze Zahl} \tag{2}$$

$$\iint\limits_R f(x,y) \;=\; \sum_i \iint\limits_{T_i} f(x,y)$$

Additivität des Integrals

gilt. Aber dann sind wir fertig! Nach der Annahme über die Zerlegung ist nämlich jedes Doppelintegral $\iint_{T_i}$ gleich 0, und daher gilt wegen der Additivität des Integrals auch $\iint_R = 0$ und somit hat R eine ganzzahlige Seite. Wir müssen also nur noch (2) verifizieren. Mit

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{2\pi i x} dx &= \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i x}\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i}(e^{2\pi i b - 2\pi i a})\\ &= \frac{e^{2\pi i a}}{2\pi i}(e^{2\pi i(b-a)} - 1)\end{aligned}$$

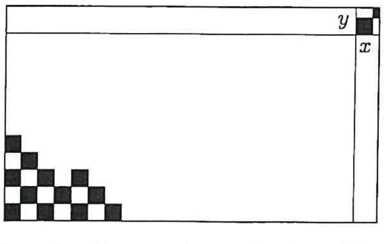
schließen wir

$$\int_a^b e^{2\pi i x} dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2\pi i(b-a)} = 1,$$

und mit $e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ sehen wir, dass die letzte Gleichung wiederum äquivalent zu

$$\cos 2\pi(b-a) = 1 \text{ und } \sin 2\pi(b-a) = 0$$

ist. Da $\cos x = 1$ genau für die ganzzahligen Vielfachen von 2π gilt, muss $b - a \in \mathbb{Z}$ sein, und daraus folgt auch $\sin 2\pi(b-a) = 0$. □



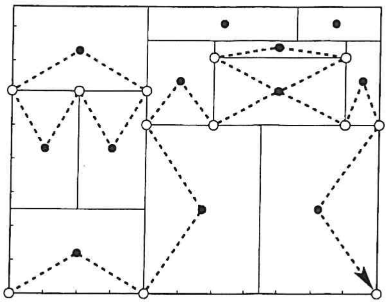
Der Anteil von schwarz in dem Eck-Rechteck ist $\min(x, \frac{1}{2}) \cdot \min(y, \frac{1}{2}) + \max(x - \frac{1}{2}, 0) \cdot \max(y - \frac{1}{2}, 0)$, und das ist stets größer als $\frac{1}{2}xy$.

■ **Zweiter Beweis.** Man färbe die Ebene in einem Schachbrettmuster mit schwarzen/weißen Quadraten der Größe $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, wobei wir mit einem schwarzen Quadrat im Punkt $(0,0)$ starten.

Nach der Annahme über die Zerlegung muss jedes kleine Rechteck T_i gleich viel schwarz und weiß enthalten, und daher muss auch im großen Rechteck R der Anteil von schwarz und weiß gleich groß sein.

Dies impliziert aber, dass R eine ganzzahlige Seite haben muss, da es anderenfalls in vier Teile zerlegt werden kann, von denen drei gleiche Anteile von schwarz und weiß besitzen, während das Stück in der rechten oberen Ecke verschiedene Anteile aufweist. Ist nämlich $x = a - \lfloor a \rfloor$, $y = b - \lfloor b \rfloor$, also $0 < x, y < 1$, so ist der Anteil von schwarz größer als der von weiß, wie aus der Figur am Rand zu erkennen ist. □

■ **Dritter Beweis.** Es sei C die Menge der Ecken in der Zerlegung, für die beide Koordinaten ganzzahlig sind (zum Beispiel ist $(0,0) \in C$), und T sei die Menge der kleinen Rechtecke. Daraus machen wir nun einen bipartiten Graphen mit der Eckenmenge $C \cup T$, wobei $c \in C$ benachbart ist zu allen Rechtecken, für die es eine Ecke in der Zerlegung darstellt.



In dieser Zeichnung von G sind die Ecken in C weiß, die Ecken in T schwarz und die Kanten gestrichelt.

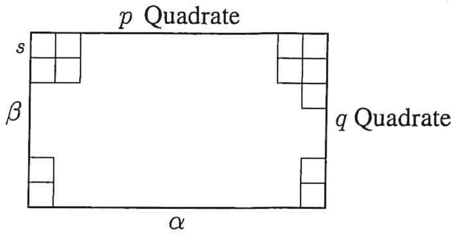
Aus der Voraussetzung folgt, dass jedes Rechteck 0, 2 oder 4 Ecken in C als Nachbarn hat. Ist nämlich eine Ecke des Rechtecks in C, dann auch die am anderen Ende einer ganzzahligen Seite. Der Graph G hat also eine *gerade* Anzahl von Kanten. Nun sehen wir uns C an. Jede Ecke aus C im Inneren oder entlang einer Seite von R hat in G eine *gerade* Anzahl von Rechtecken als Nachbarn, während die Ecke $(0,0)$ zu genau einem Rechteck benachbart ist. Also muss es noch ein weiteres $c \in C$ mit ungeradem Grad geben, und dieses c kann nur eine der anderen Ecken von R sein. □

Alle drei Beweise können leicht erweitert werden, so dass sie auch die folgende n-dimensionale Version des Satzes von de Bruijn liefern: Wenn ein n-dimensionaler Quader R in kleine Quader zerlegt wird, die alle mindestens eine ganzzahlige Kantenlänge haben, dann hat auch R eine ganzzahlige Kantenlänge.

Wir wollen unsere Diskussion aber in diesem Kapitel in der Ebene halten, und nehmen uns daher ein Gegenstück zu de Bruijns Resultat vor, das von Max Dehn stammt (viele Jahre früher) und ganz ähnlich klingt, für den Beweis aber andere Ideen verlangt.

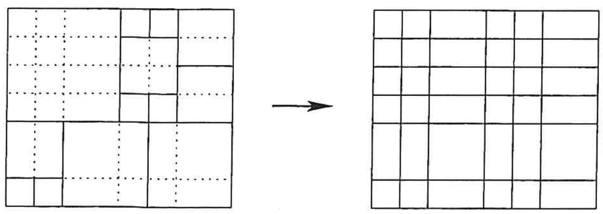
Satz. *Ein Rechteck kann genau dann in Quadrate zerlegt werden, wenn der Quotient der Seitenlängen eine rationale Zahl ist.*

Eine Hälfte des Satzes ist leicht. Angenommen das Rechteck R hat Seitenlängen α and β mit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, also $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$, wobei $p, q \in \mathbb{N}$ ist. Setzen wir $s := \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$, so können wir wie in der Zeichnung R sofort in Quadrate der Größe $s \times s$ zerlegen.



Für den Beweis der Umkehrung verwandte Max Dehn eine elegante Schlussweise, die er schon erfolgreich in seiner Lösung des Hilbertschen dritten Problems angewandt hatte (siehe Kapitel 9). Die beiden Arbeiten erschienen in aufeinanderfolgenden Jahren in den *Mathematischen Annalen*.

■ **Beweis.** Es sei R in Quadrate möglicherweise verschiedener Größen zerlegt, wobei wir durch Skalierung voraussetzen können, dass R ein $a \times 1$ Rechteck ist. Wir nehmen nun $a \notin \mathbb{Q}$ an und leiten daraus einen Widerspruch ab. Im ersten Schritt verlängern wir die Seiten der Quadrate zur vollen Breite bzw. Höhe von R wie in der Abbildung.



Das große Rechteck R ist nun in eine Anzahl von kleinen Rechtecken zerlegt; es seien $a_1, a_2, \ldots, a_M$ ihre Seitenlängen (in irgendeiner Reihenfolge) und

$$A = \{1, a, a_1, \ldots, a_M\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Im zweiten Schritt verwenden wir Lineare Algebra. Wir definieren $V(A)$ als den Vektorraum aller Linearkombinationen der Zahlen in A mit rationalen Koeffizienten. Man bemerke, dass $V(A)$ alle Seitenlängen der Quadrate in der ursprünglichen Zerlegung enthält, da jede solche Seitenlänge die Summe einiger a_is ist. Da die Zahl a nicht rational ist, können wir $\{1, a\}$ zu einer Basis B von $V(A)$ erweitern,

$$B = \{b_1 = 1, b_2 = a, b_3, \ldots, b_m\}\,.$$

Schließlich definieren wir die Funktion $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(1) := 1, \quad f(a) := -1 \quad \text{und} \quad f(b_i) := 0 \ \text{ für } i \geq 3$$

Lineare Erweiterung:
$f(q_1 b_1 + \cdots + q_m b_m) :=$
$q_1 f(b_1) + \cdots + q_m f(b_m)$
für $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$.

und erweitern sie linear auf $V(A)$.
Die folgende Definition der Funktion „Inhalt" von Rechtecken wird den Beweis in drei schnellen Schritten beenden: Für $c, d \in V(A)$ sei der Inhalt des $c \times d$ Rechtecks als

$$\text{Inhalt}(\underset{c}{\boxed{}}\,d) = f(c)f(d).$$

erklärt.

(1) $\text{Inhalt}(\underset{c_1\ \ c_2}{\boxed{}\boxed{}}\,d) = \text{Inhalt}(\underset{c_1}{\boxed{}}\,d) + \text{Inhalt}(\underset{c_2}{\boxed{}}\,d).$

Dies folgt sofort aus der Linearität von f, wobei das analoge Resultat natürlich auch für senkrechte Streifen gilt.

(2) $\text{Inhalt}(R) = \sum_{\text{Quadrate}} \text{Inhalt}(\square)$, wobei die Summe alle Quadrate in der ursprünglichen Zerlegung durchläuft.

Dazu müssen wir nur bemerken, dass nach (1) Inhalt(R) gleich der Summe der Inhalte aller kleinen Rechtecke in der erweiterten Zerlegung ist. Da jedes solche kleine Rechteck in genau einem Quadrat der ursprünglichen Zerlegung liegt, so sehen wir, wieder mit (1), dass diese Summe die rechte Seite von (2) ergibt.

(3) Wir haben

$$\text{Inhalt}(R) = f(a)f(1) = -1,$$

während für ein Quadrat der Seitenlänge t $\text{Inhalt}(\underset{t}{\square}) = f(t)^2 \geq 0$ ist und daher

$$\sum_{\text{Quadrate}} \text{Inhalt}(\square) \geq 0,$$

und das ist der gewünschte Widerspruch. $\square$

All jenen, die noch mehr über Zerlegungen in der Ebene erfahren wollen, empfehlen wir wärmstens den wunderbaren Übersichtsartikel [1] von Federico Ardila and Richard Stanley.

Literatur

[1] F. ARDILA AND R. P. STANLEY: *Pflasterungen,* Math. Semesterberichte **53** (2006), 17-43.

[2] N. G. DE BRUIJN: *Filling boxes with bricks,* Amer. Math. Monthly **76** (1969), 37-40.

[3] M. DEHN: *Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke,* Mathematische Annalen **57** (1903), 314-332.

[4] S. WAGON: *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle,* Amer. Math. Monthly **94** (1987), 601-617.

„Himmel-und-Hölle mit neuen Regeln: Ganze Zahlen betreten verboten!"