Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

*Kommentare zum Kapitel 1.7 – Determinante*

Die Determinante ist eine Abbildung, die jeder *quadratischen* Matrix mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ eine reelle Zahl zuordnet. Diese Determinante $det(A)$ ist also nur dann definiert, wenn $A$ genau so viele Zeilen wie Spalten hat. Die Determinante spielt in sehr vielen Bereichen der Mathematik und deren Anwendungen eine große Rolle. Wie wir noch sehen werden, ist sie insbesondere im Zusammenhang mit der Lösung von linearen Gleichungssystemen interessant – und später auch noch im Zusammenhang mit der Optimierung von differenzierbaren Funktionen in mehreren Variablen.

Für eine Matrix $A = (a)$ mit nur einer Zeile und nur einer Spalte – und dem Koeffizienten $a$ – wird einfach $det(A) := a$ gesetzt.

Für quadratische Matrizen $V$ mit mindestens zwei Zeilen und Spalten kann die Determinante $det(V) = D(V)$ rekursiv nach dem **Laplace'schen Entwicklungssatz** berechnet werden; siehe den zweiten Teil von Satz 1.7. Hier befindet sich aber leider ein Schreibfehler; daher sei die genaue Angabe der Rekursionsvorschrift noch einmal wiederholt:

Hat die $n \times n$-Matrix $V$ die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ . \\ . \\ . \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} v_n^1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n^n \end{pmatrix},$$

und bezeichnet $\hat{V}(i,j) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, die aus $V$ durch Streichung der $i-$ ten Spalte und $j-$ ten Zeile hervorgeht, so gilt – für festen Zeilenindex $j$:

$$D(v_1, ..., v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot v_i^j \cdot D(\hat{V}(i,j)).$$

Es muss also unter dem Summenzeichen heißen: $i = 1$.
Diese Formel bedeutet auch: Wir *entwickeln die Determinante nach der $j-$ ten Zeile.*

Analog kann man die Determinante auch für festen Spaltenindex $i$ nach der $i-$ ten Spalte entwickeln; dann erhält man folgende Rekursionsvorschrift:

$$D(v_1, ..., v_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot v_i^j \cdot D(\hat{V}(i,j)).$$

Hinter dem Summenzeichen stehen also die gleichen Faktoren wie oben; nur:
In der obigen Formel ist $j$ fixiert und $i$ der Laufindex, in der letzten Formel ist es umgekehrt.

Für eine $2 \times 2$-Matrix erhalten wir – siehe auch die Bemerkung auf Seite 109:

$$det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{22}.$$

Weiter betrachten wir als Beispiel die folgende $3 \times 3$-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 11 \\ -5 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir die Determinante $det(V)$ durch Entwicklung nach der letzten Zeile, so haben wir die obige erste Rekursionsformel für den Zeilenindex $j = 3$ anzuwenden. Wir erhalten dann – unter besonderer Berücksichtigung der durch die Potenz $(-1)^{i+j}$ bestimmten Vorzeichen:

$$\begin{aligned} det(V) &= -5 \cdot (7 \cdot 11 - 4 \cdot (-1)) - 6 \cdot (2 \cdot 11 - 3 \cdot (-1)) - 2 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 7) \\ &= -5 \cdot 81 - 6 \cdot 25 - 2 \cdot (-13) = -405 - 150 + 26 = -529. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Determinante $det(V)$ auch noch einmal durch Entwicklung nach der zweiten Spalte – und erhalten:

$$\begin{aligned} det(V) &= -7 \cdot (3 \cdot (-2) - (-5) \cdot 11) + 4 \cdot (2 \cdot (-2) - (-5) \cdot (-1)) - 6 \cdot (2 \cdot 11 - 3 \cdot (-1)) \\ &= -7 \cdot 49 + 4 \cdot (-9) - 6 \cdot 25 = -343 - 36 - 150 = -529. \end{aligned}$$

Hätten die beiden Ergebnisse nicht übereingestimmt, so wäre irgendwo ein Rechenfehler gewesen.

Es sei auch noch einmal auf folgende Rechenregeln für die Determinante hingewiesen:

Sind $v_1, ..., v_l, ..., v_k$ und $v_l{}'$ Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^k$, und ist $s \in \mathbb{R}$, so gilt:
(I) $$det(v_1, ..., v_{l-1}, s \cdot v_l, v_{l+1}, ..., v_k) = s \cdot det(v_1, ..., v_l, ..., v_k).$$

(II) $$\begin{aligned} & det(v_1, ..., v_{l-1}, v_l + v_l{}', v_{l+1}, ..., v_n) \\ = & \, det(v_1, ..., v_{l-1}, v_l, v_{l+1}, ..., v_n) + det(v_1, ..., v_{l-1}, v_l{}', v_{l+1}, ..., v_n). \end{aligned}$$

Diese beiden Rechenregeln besagen:
Die Determinante ist eine *multilineare* Abbildung.

Ferner ist die Determinante auch *alternierend*; das heißt: Stimmen zwei Spaltenvektoren einer quadratischen Matrix $A$ überein, so hat die Determinante den Wert 0.

Zusammen mit den Rechenregeln $(I)$ und $(II)$ folgt weiter:
Sind die Spalten einer – quadratischen – Matrix linear abhängig, so hat die Determinante ebenfalls den Wert 0.

Weiter folgt sofort: Die Determinante der Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat den Wert 1.

Weil die Volumenfunktion, die je drei linear unabhängigen Spaltenvektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ das Volumen $Vol(Spat(v_1, v_2, v_3))$ des von diesen Vektoren aufgespannten Spats (oder Parallelotops) zuordnet, ganz ähnliche Eigenschaften wie die Determinante hat – und analoge Aussagen auch in höheren Dimensionen gelten, folgt die in der Bemerkung auf Seite 105 gegebene Beziehung, die in weiten Teilen der Geometrie und der Analysis wichtig ist:

$$|det(v_1, ..., v_k)| = Vol(Spat(v_1, ..., v_k)).$$

Schließlich sei auch noch folgende wichtige Multiplikationsformel für quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ angemerkt:

$$det(A \bullet B) = det(A) \cdot det(B).$$

Zusammen mit der Tatsache, dass die Determinante alternierend ist, folgt die letzte Aussage in Satz 1.18:

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist genau dann von 0 verschieden, wenn sie regulär ist.

Die anderen Eigenschaften in Satz 1.18 folgen noch wesentlich einfacher aus den oben aufgeführten Rechenregeln.

Zum Rechnen besonders wichtig ist dabei:
Die Determinante einer – oberen oder unteren – Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente. Dies folgt sofort durch Induktion.