Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 13.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

5. bis 9. Juli 2021

Zusammenfassung der 13.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 13.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein. Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit von Matrizen (**Abschnitte VIII.1. und VIII.2.** im Skript).

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein **Eigenwert** von A, falls es ein $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$ gibt. In diesem Fall heißt x ein **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ.

Definition

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Setze

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die Funktion χ_A nennt man das **charakteristische Polynom** von A.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Dann gilt:
1) χ_A ist ein Polynom n-ten Grades.
2) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\chi_A(\lambda) = 0$ gilt.

Beweis: Siehe Lemma VIII.1.3. im Skript.

Die Eigenwerte von A sind also genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Insbesondere kann A höchstens n verschiedene Eiegnwerte besitzen.

Ein Beispiel finden Sie im Skript auf Seite 138.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, so setzen wir

$$E_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda x\}.$$

$E_A(\lambda)$ heißt der **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ.
Weiter heißt $g_A(\lambda) := \dim(E_A(\lambda))$ die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ von A.
Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_A nennt man die **algebraische Vielfachheit** von λ. Sie wird mit $k_A(\lambda)$ bezeichnet.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$, *sei* $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ *und sei* $\lambda \in \mathbb{K}$ *ein Eigenwert von* A. *Dann gilt* $g_A(\lambda) \leq k_A(\lambda)$.

Beweis: Siehe Lemma VIII.1.6. im Skript.

Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und sei* $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. *Sind* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ *paarweise verschiedene Eigenwerte von* A *und ist* $x_i \in \mathbb{K}^n$ *ein Eigenvektor von* A *zum Eigenwert* λ_i *für alle* $i = 1, \ldots, m$, *so ist* $(x_1, \ldots, x_m)$ *linear unabhängig.*

Beweis: Siehe Lemma VIII.1.7. im Skript.

Diagonalisierbarkeit

Definition

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$. A heißt **ähnlich** zu B (in Zeichen: $A \sim B$), falls es eine invertierbare Matrix $T \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $TAT^{-1} = B$ gibt.
A heißt **diagonalisierbar**, falls es eine Diagonalmatrix D mit $A \sim D$ gibt.

Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Dann gilt:
A ist diagonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis des $\mathbb{K}^n$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Beweis: Siehe Lemma VIII.2.3. im Skript.

Diagonalisierbarkeit

Das Hauptkriterium für Diagonalisierbarkeit lautet wie folgt:

Satz: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Dann gilt:
A ist diagonalisierbar genau dann, wenn das charakteristische Polynom χ_A über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt und $g_A(\lambda) = k_A(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A gilt.

Beweis: Siehe Satz VIII.2.4. im Skript.

Beispiele finden Sie im Skript auf Seite 144.

Diagonalisierbarkeit

Definition

1) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt **symmetrisch**, falls $A = A^T$ gilt.

2) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt **hermitesch**, falls $A = \overline{A}^T$ gilt.

Anstelle von symmetrisch oder hermitesch sagt man auch, die Matrix A sei **selbstadjungiert**.

Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Dann gilt: A ist selbstadjungiert genau dann, wenn $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt.

Beweis: Siehe Lemma VIII.2.6. im Skript.

Lemma

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesch und $\lambda \in \mathbb{C}$ sei ein Eigenwert von A. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: Siehe Lemma VIII.2.7. im Skript.

Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ selbstadjungiert. Seien λ und μ Eigenwerte von A mit $\lambda \neq \mu$. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und sei $y \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ. Dann gilt $x \perp y$ (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{K}^n$).

Beweis: Siehe Lemma VIII.2.8. im Skript.

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$O(n) := \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : A \text{ ist invertierbar mit } A^{-1} = A^T \right\}$$

und

$$U(n) := \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A \text{ ist invertierbar mit } A^{-1} = \overline{A}^T \right\}.$$

Die Elemente von $O(n)$ heißen **orthogonale Matrizen**, die Elemente von $U(n)$ nennt man **unitäre Matrizen**.

Bemerkungen:
1) $O(n)$ und $U(n)$ bilden bzgl. der Matrixmultiplikation eine Gruppe.
2) $A \in O(n)$ genau dann, wenn die Spalten von A eine ONB des $\mathbb{R}^n$ bilden. Entsprechendes gilt für die Zeilen und auch für $U(n)$.

Diagonalisierbarkeit

Satz von der Hauptachsentransformation:
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ selbstadjungiert. Dann existiert eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), die aus Eigenvektoren von A besteht. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Beweis: Siehe Satz VIII.2.10. im Skript.

Korollar: Ist A eine symmetrische bzw. hermitesche $(n \times n)$-Matrix, so existieren eine Diagonalmatrix D und eine Matrix $T \in O(n)$ bzw. $T \in U(n)$ mit $TAT^{-1} = D$.

Beweis: Siehe Korollar VIII.2.11. im Skript.