Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar Kombinatorische Geometrie

Leipzig, den 25.5.2021

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit beliebigen positiv definiten Skalarprodukten

Es sei $n \geq 1$. Wir betrachten auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ein beliebiges positiv definites Skalarprodukt $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; das heißt:
g ist eine symmetrische Bilinearform, und für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $g(v, v) > 0$.

Definition:

Eine Teilmenge $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $|B| = n$ heißt eine *Orthogonalbasis* von $(\mathbb{R}^n, g)$, wenn für alle i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt: $g(v_i, v_j) = 0$.
Ist zusätzlich $g(v_i, v_i) = 1$ für $1 \leq i \leq n$, so heißt B eine *Orthonormalbasis*.

Zunächst sei angemerkt:

Satz I:

Jede Orthogonalbasis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ – im Sinne obiger Definition – von $(\mathbb{R}^n, g)$ ist auch eine Basis.

Beweis: Andernfalls wäre B als n-elementige Menge linear abhängig. Aus Symmetriegründen kann dann angenommen werden, dass $r_1, ..., r_{n-1} \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} r_i \cdot v_i.$$

Dann folgt aber wegen $v_n \neq 0$:

$$0 < g(v_n, v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} r_i \cdot g(v_i, v_n) = 0,$$

Widerspruch!

□

Wir zeigen nun – ohne zu rechnen:

Satz II:

$(\mathbb{R}^n, g)$ besitzt eine Orthogonalbasis – und daher auch eine Orthonormalbasis.

Beweis: Der zweite Teil der Behauptung folgt schnell aus dem ersten Teil:
Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Orthogonalbasis, so setze $w_i := \frac{1}{\sqrt{g(v_i, v_i)}} \cdot v_i$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $g(w_i, w_j) = \delta_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$; das heißt: $g(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$, aber $g(w_i, w_i) = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

Zum Nachweis der ersten Behauptung verfahren wir – rekursiv – wie folgt:
Wähle zunächst $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig.

Ist $1 \leq i \leq n - 1$, und sind $v_1, , , , , v_i$ bereits gewählt, so betrachten wir die i homogenen Hyperebenen

$$H_j := \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, g(v, v_j) = 0\} \text{ für } 1 \leq j \leq i.$$

Diese schneiden sich in einem – homogenen – Unterraum U, der (mindestens) die Dimension $n - i$ hat. Wir wählen demgemäß $v_{i+1} \in U \setminus \{0\}$ beliebig.

Dann ist also $g(v_j, v_{i+1}) = 0$ für $1 \leq j \leq i$.
Schließlich folgt: $\{v_1, ..., v_n\}$ ist eine Orthogonalbasis.

$\square$

Nun wollen wir noch einsehen, dass der hier betrachtete – allgemeine – Euklidische Vektorraum $(\mathbb{R}^n, g)$ isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Euklidischen Norm $|| \, ||_2$ ist.

Satz III:

Es sei $B_0 = \{e_1, ..., e_n\}$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$, die also eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts $\langle \, , \, \rangle$ ist.
Ferner sei $B_g = \{v_1, ..., v_n\}$ irgendeine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, g)$. Dann folgt:

i) Der – eindeutig bestimmte – lineare Isomorphismus $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\alpha(e_i) := v_i \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

erfüllt die Beziehung

$$\langle v, w \rangle \; = g(\alpha(v), \alpha(w)) \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Vermöge α wird die gewöhnliche Euklidische Norm $|| \, ||_2$ von $\mathbb{R}^n$ auf eine neue Norm $|| \, ||_g$ von $\mathbb{R}^n$ übertragen, die gegeben ist durch $||\alpha(v)||_g := ||v||_2$.
Genauer ist also

$$||\alpha(v)||_g = ||v||_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{g(\alpha(v), \alpha(v))}.$$

Insgesamt folgt, dass $\mathbb{R}^n$ in der gewöhnlichen Euklidischen Norm isometrisch ist zu $\mathbb{R}^n$ in der Norm $|| \, ||_g$.

Beweis:

Die behauptete Formel in i) ist aufgrund der Definition von α trivial, wenn v und w beide zu der Standard-Basis $\{e_1, ..., e_n\}$ gehören. Allgemein folgt die Formel dann aus der Tatsache, dass es sich sowohl bei $\langle \, , \, \rangle$ als auch bei g um (symmetrische) Bilinearformen handelt.

ii) folgt direkt aus i).

$\square$