Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 6.5.2021

Behandlung einiger Linearer Gleichungssysteme

Ia) Zu lösen ist das folgende Lineare Gleichungssystem:

$$x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 0 \wedge x_3 - 8x_4 = 0.$$

Hier sind zwei Variablen frei wählbar; die anderen können dann berechnet werden.
Um die Rechnungen möglichst einfach zu gestalten, setzen wir x_2 und x_4 als die frei wählbaren Koordinaten an – aber ohne denen *konkrete* Werte zuzuordnen; wir haben hier mit Buchstaben zu rechnen!

Sodann erhalten wir:

$$x_3 = 8x_4 \wedge x_1 = -4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = -4x_2 + 55x_4.$$

Setzen wir nun noch zur Abkürzung $x = x_2$ und $y = x_4$, so erhalten wir als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(-4x + 55y, x, 8y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Ib) Nun studieren wir folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 5 \wedge x_3 - 8x_4 = -11.$$

Dies ist ein inhomogenes Lineares Gleichungssystem; das zugehörige homogene Lineare Gleichungssystem ist das in **Ia)**.

Hier wählen wir *eine möglichst einfache* spezielle Lösung, indem wir $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$ setzen.
Dann erhalten wir:

$$x_3 = -11 \wedge x_1 = 6x_3 + 5 = -61.$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}'$ ergibt sich nun wie folgt:
Wir müssen zu *jeder* Lösung der Menge $\mathbb{L}$ aus **Ia)** die gerade berechnete *spezielle* Lösung $(-61, 0, -11, 0)$ addieren; siehe dazu auch Korollar 1.5.
Wir erhalten also:

$$\mathbb{L}' = \{(-4x + 55y - 61, x, 8y - 11, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Beide Lösungsmengen $\mathbb{L}$ und $\mathbb{L}'$ – zu **Ia)** und **Ib)** – sind zweidimensional und daher Ebenen.
Genauer ist $\mathbb{L}$ eine *homogene Ebene*, die also den Nullvektor enthält.

Die Ebene $\mathbb{L}'$ entsteht aus $\mathbb{L}$ durch *Verschiebung* um den Vektor $(-61, 0, -11, 0)$.

II) Zu lösen ist folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \ \wedge \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \ \wedge \ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 27.$$

Äquivalenzumformung liefert, indem wir die erste Gleichung sowohl von der zweiten als auch von der dritten Gleichung subtrahieren:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \ \wedge \ x_2 + 3x_3 = 12 \ \wedge 2x_2 + 8x_3 = 22.$$

Man beachte dabei, dass die erste Gleichung deswegen wiederholt wurde, damit es sich insgesamt wirklich um eine Äquivalenzumformung handelt; man kann also auch von dem letzten Gleichungssystem auf das erste schließen.

Im zuletzt aufgeführten Linearen Gleichungssystem subtrahieren wir das Doppelte der zweiten Gleichung von der letzten und erhalten durch weitere Äquivalenzumformung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \ \wedge \ x_2 + 3x_3 = 12 \ \wedge \ 2x_3 = -2.$$

Nun können wir aus der letzten Gleichung x_3, dann aus der zweiten Gleichung x_2 und schließlich aus der ersten Gleichung x_1 berechnen; wir erhalten:

$$x_3 = -1, \, x_2 = 12 - 3x_3 = 15, \, x_1 = 5 - x_2 - x_3 = -9.$$

Die Lösungsmenge ist also gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{(-9, 15, -1)\}.$$

Die Lösungsmenge besitzt somit genau ein Element; sie besteht also aus einem Punkt – in unserem Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$.

Wir machen schließlich noch eine *Probe:* Wir setzen den Punkt $(-9, 15, -1)$ in die gegebenen drei Gleichungen ein und erhalten die wahren Aussagen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -9 + 15 - 1 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -9 + 30 - 4 = 17, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= -9 + 45 - 9 = 27. \end{aligned}$$

Warnung: Es wäre **falsch**, zu schreiben: $\mathbb{L} = \{-9, 15, -1\}$. Dies ist nämlich die Menge mit den drei reellen Zahlen $-9, 15$ und -1 und keine Menge mit einem Punkt! Im obigen Ergebnis sind also die beiden runden Klammern des Vektors $(-9, 15, -1)$ wichtig!

III) Schließlich betrachten wir folgendes – homogene – lineare Gleichungssystem:

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \wedge 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0 \wedge 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0.$$

Wir notieren sogleich die zugehörige Koeffizientenmatrix und führen zulässige Zeilenumformungen durch, bis eine Matrix in Zeilenstufenform entsteht:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 2 & 6 & -8 \\ 0 & 20 & 5 & -9 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 15 & 21 & -8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 2/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -8/15 \end{pmatrix}.$$

Im ersten Schritt wird die erste Zeile von der zweiten subtrahiert – und die letzte Zeile wird ersetzt durch das Vierfache der ersten Zeile minus dem Dreifachen der letzten Zeile.
Im zweiten Schritt wird das Fünffache der zweiten Zeile zur letzten Zeile addiert.
Im letzten Schritt wird die erste Zeile durch 3, die zweite Zeile durch -4 und die letzte Zeile durch 15 dividiert.

Schließlich sind x_4 und x_5 frei wählbar, und x_3, x_2, x_1 lassen sich dann wie folgt berechnen:

$x_3 = -7/5 \cdot x_4 + 8/15 \cdot x_5,$

$x_2 = 1/2 \cdot x_3 + 3/2 \cdot x_4 - 2x_5 = -7/10 \cdot x_4 + 4/15 \cdot x_5 + 3/2 \cdot x_4 - 2x_5 = 4/5 \cdot x_4 - 26/15 \cdot x_5,$

$x_1 = -8/3 \cdot x_2 - 2/3 \cdot x_3 - x_4 - 8/3 \cdot x_5 =$
$-\, 32/15 \cdot x_4 + 208/45 \cdot x_5 + 14/15 \cdot x_4 - 16/45 \cdot x_5 - x_4 - 8/3 \cdot x_5 = -11/5 \cdot x_4 + 8/5 \cdot x_5.$

Mit $x = 1/5 \cdot x_4$ und $y = 1/5 \cdot x_5$ ergibt sich nun die Lösungsmenge wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{(-11x + 8y, 4x - 26/3 \cdot y, -7x + 8/3 \cdot y, 5x, 5y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$