

Fachseminar Kombinatorische Geometrie

Geraden in der Ebene und Zerlegung von Graphen

Ein Vortrag von

Romy Lampe

Matrikelnr. 3709013

rl95jeda@studserv.uni-leipzig.de

Gliederung

- Einleitung 2
- Einige Sätze zu Geraden in der Ebene 3
- Graphen 14
- Einige Sätze über die Zerlegung von Graphen 16

Einleitung

Der Satz von Sylvester - Gallai

- Problem wurde 1893 von James Joseph Sylvester in der Problemsäule der Educational Times gestellt
- "Man beweise, dass es nicht möglich ist, eine endliche Anzahl reeller Punkte so anzuordnen, dass jede Gerade durch zwei der Punkte immer auch durch einen dritten der Punkte geht, es sei denn, alle Punkte liegen auf einer Geraden"
- 1944 Beweis von Tibor Gallai (mehr als 40 Jahre später), nachdem Paul Erdős das Problem neu stellte

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 1: Für jede Anordnung von endlich vielen Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen, gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 1: Für jede Anordnung von endlich vielen Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen, gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.

Beweis: Sei $\mathcal{P}$ die gegebene Menge von Punkten.

- Betrachte die endliche Menge $\mathcal{L}$ aller Geraden, die mind. 2 der Punkte von $\mathcal{P}$ enthalten
- Unter allen Paaren (P, L) , für die $P \in \mathcal{P}$ nicht auf $L \in \mathcal{L}$ liegt, wählen wir ein Paar (P_0, l_0) aus, für das der Punkt P_0 den kleinsten Abstand von der Geraden l_0 hat
- Berechne Q den Punkt auf l_0 , der am nächsten zu P_0 liegt

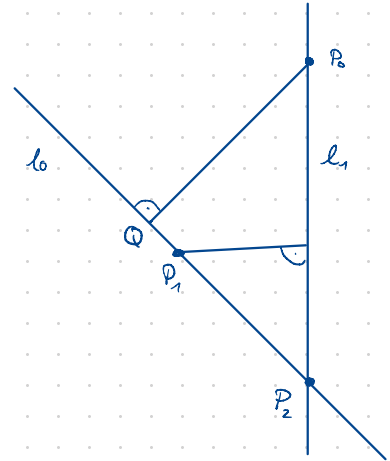
→ Behauptung: l_0 enthält genau 2 Punkte aus $\mathcal{P}$

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 1: Für jede Anordnung von endlich vielen Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen, gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.

Beweis: $\rightarrow$ Behauptung: l_0 enthält genau 2 Punkte aus $\mathcal{P}$

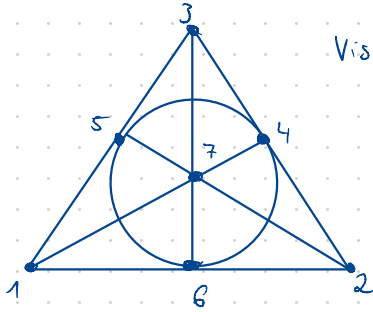
- Wenn dem nicht so wäre, würde l_0 mind. 3 Punkte aus $\mathcal{P}$ enthalten
- Damit müssten 2 dieser Punkte auf derselben Seite von Q liegen
- Nehme an, dass P_1 zwischen Q und P_2 liegt, wobei P_1 mit Q zusammenfallen könnte
- Dann wäre der Abstand von P_1 zu l_1 (die durch P_0 und P_2 bestimmt wird) kleiner als der Abstand zwischen P_0 und l_0 $\rightarrow$ $\downarrow$ zu unserer Auswahl von l_0 und P_0



Die Fano-Ebene

- Für den Beweis verwendet:
 - metrische Axiome ("kleinster Abstand")
 - Ordnungsaxiome ("P₁ liegt zwischen Q und P₂")
 - Inzidenzaxiome

→ geht es nur mit Inzidenzaxiomen?



Visualisierung der Fano-Ebene

- $\mathcal{P} = \{1, \dots, 7\}$, $\mathcal{L}$ besteht aus 7 3-Punkt-Geraden (inkl. der Geraden $\{4, 5, 6\}$)
- Inzidenzaxiome erfüllt
- keine 2-Punkt-Geraden

→ Satz von Sylvester-Gallai zeigt, dass Fano-Konfiguration in jeder reellen Einbettung immer eine "krumme" Gerade enthalten muss

┐ Funfact: die Anordnungsaxiome reichen aus, um den Satz von Sylvester-Gallai zu beweisen

Inzidenzaxiome

- 1) für je zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält
- 2) auf jeder Geraden liegen mind. 2 Punkte
- 3) es gibt mind. 3 Punkte in allgemeiner Lage

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

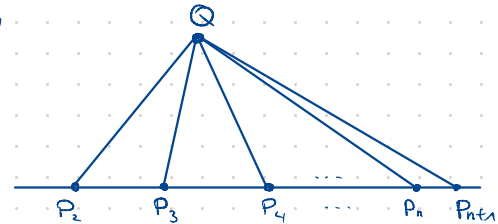
Satz 2: Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen.
Dann besteht die Menge $\mathcal{L}$ der Geraden, die durch mind. 2 Punkte in $\mathcal{P}$ gehen,
aus mind. n Geraden.

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 2: Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann besteht die Menge $\mathcal{L}$ der Geraden, die durch mind. 2 Punkte in $\mathcal{P}$ gehen, aus mind. n Geraden.

Beweis: • $|\mathcal{P}| = 3 \rightarrow$ klar

- $|\mathcal{P}| = n+1$: Nach Satz von Sylvester - Gallai gibt es eine Gerade $l_0 \in \mathcal{L}$, die genau 2 Punkte $P, Q \in \mathcal{P}$ enthält.
- Betrachte $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$ und $\mathcal{L}'$ für die Menge aller Geraden, die durch $\mathcal{P}'$ bestimmt sind.
- Liegen die Punkte von $\mathcal{P}'$ nicht alle auf einer Geraden, so gilt nach Induktion: $|\mathcal{L}'| \geq n$ und deshalb $|\mathcal{L}| \geq n+1$, wegen der zusätzlichen Geraden l_0 .
- Wenn die Punkte in $\mathcal{P}'$ alle auf einer einzigen Geraden liegen, dann haben wir ein "Geradenbüschel", das genau $n+1$ Geraden bestimmt.



Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 3: Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen und seien $A_1, \dots, A_m$ echte Teilmengen von X , sodass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 3: Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen und seien $A_1, \dots, A_m$ echte Teilmengen von X , sodass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Beweis 1: Für $x \in X$ sei r_x die Anzahl der Mengen A_i , die x enthalten. Aus den Voraussetzungen folgt: $2 \leq r_x < m$. Wenn nun $x \notin A_i$ ist, dann gilt $r_x \geq |A_i|$, weil dann die $|A_i|$ Mengen verschieden sein müssen, die x und ein Element der Menge A_i enthalten. Nehme an, dass $m < n$. Dann gilt $m|A_i| < n r_x$ und somit $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$ für $x \notin A_i$ und damit folgt schließlich

$$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i: x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x: x \notin A_i} \frac{1}{n(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 3: Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen und seien $A_1, \dots, A_m$ echte Teilmengen von X , sodass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Beweis 2: Sei B die Inzidenzmatrix von $(X, A_1, \dots, A_m)$, sodass die Zeilen von B den Elementen von X zugeordnet sind, während die Spalten von B den Mengen $A_1, \dots, A_m$ entsprechen, mit:

$$B_{xA} := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

- Betrachte BB^T . Für $x \neq x'$ gilt $(BB^T)_{xx'} = 0$, weil x und x' in genau einer gemeinsamen Menge A_i enthalten sind.
- Schreibe BB^T als

$$BB^T = \begin{pmatrix} r_{x_1}-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{x_2}-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{x_n}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } r_x \text{ wie oben} \\ \text{definiert ist}$$

Einige Sätze zu Geraden in der Ebene

Satz 3: Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen und seien $A_1, \dots, A_m$ echte Teilmengen von X , sodass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Beweis 2:

$$BB^T = \underbrace{\begin{pmatrix} r_{x_1}-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{x_2}-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{x_n}-1 \end{pmatrix}}_{\text{pos. definit (nur pos. EW)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{pos. semidefinit (EW } n \text{ und } 0)}, \text{ wobei } r_x \text{ wie oben definiert ist}$$

$\Rightarrow BB^T$ ist positiv definit, insbes. invertierbar mit $\text{Rang}(BB^T) = n$

$\Rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ hat mind. Rang $n \Rightarrow n \leq m$, da der Rang nie größer sein kann als die Spaltenzahl einer Matrix

Graphen

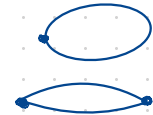
Def.: Ein Graph ist ein Paar $G=(V,E)$, wobei V die Menge der Ecken ist, E die Menge der Kanten und jede Kante $e \in E$ zwei Ecken $v,w \in V$ "verbindet".



Wir betrachten nur endliche Graphen (V, E sind endlich).

- einfache Graphen: keine Schleifen (=Kanten, die eine Ecke mit sich selbst verbinden)

keine vielfachen Kanten (=Kanten, die dieselbe Eckenmenge haben)



- 2 Ecken heißen benachbart oder adjacent, wenn sie durch eine Kante verbunden sind



- eine Ecke und eine Kante heißen inzident, wenn die Kante die Ecke mit einer anderen verbindet

- Zwei Graphen $G=(V,E)$ und $G'=(V',E')$ heißen isomorph,

wenn es Bijektionen $V \rightarrow V'$ und $E \rightarrow E'$ gibt, die die Inzidenzen

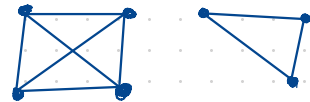
zwischen Ecken und den sie verbindenden Kanten erhalten



- $G'=(V',E')$ ist ein Untergraph von $G=(V,E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist,

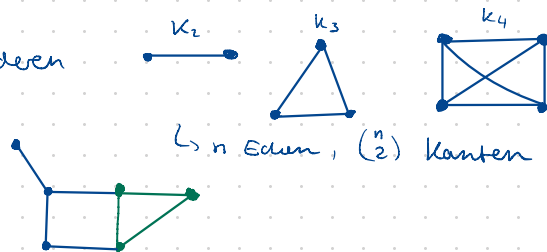
und wenn jede Kante $e \in E'$ dieselben Ecken in G' verbindet

wie in G



- Ein Graph G ist zusammenhängend, wenn es zwischen zwei verschiedenen Ecken von G immer einen Weg in G gibt $\Leftrightarrow$ wenn man G nicht in 2 Untergraphen mit disjunkten Eckenmengen aufteilen kann

- Ein Graph ist vollständig, wenn jeder seiner Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.

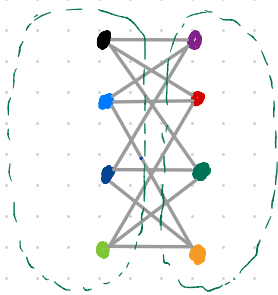
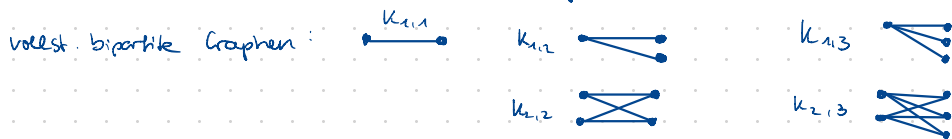


- Eine Clique in G ist ein vollständiger Untergraph von G .

- Eine unabhängige Menge in G ist ein induzierter Untergraph ohne Kanten, also eine Menge von Ecken, in der keine zwei durch eine Kante verbunden sind

- Ein Graph heißt bipartit, falls sich seine Knoten in 2 disjunkte Teilmengen aufteilen lassen, sodass zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen, also wenn man seine Eckenmenge als Vereinigung von 2 unabhängigen Mengen schreiben kann

$\Leftrightarrow$ falls er isomorph zu einem Untergraphen eines vollst. bipartiten Graphen ist



Einige Sätze über die Zerlegung von Graphen

Satz 3: Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen und seien $A_1, \dots, A_m$ echte Teilmengen von X , sodass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Satz 3': Wenn wir den vollständigen Graphen K_n so in m kleinere Cliquen zerlegen, dass jede Kante in genau einer Clique liegt, dann ist $m \geq n$.

Einige Sätze über die Zerlegung von Graphen

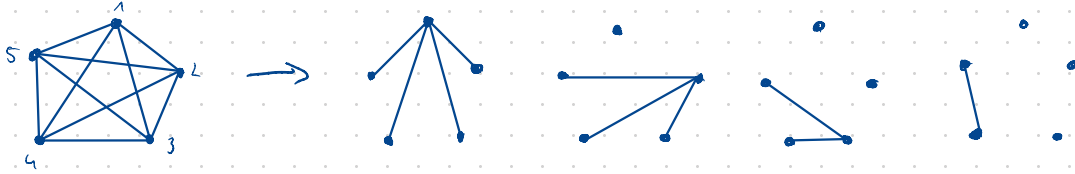
Satz 3: Sei X eine endliche Menge von $n \geq 3$ Elementen und seien $A_1, \dots, A_m$ echte Teilmengen von X , sodass jedes Paar von Elementen in X in genau einer der Mengen A_i enthalten ist. Dann gilt $m \geq n$.

Satz 3': Wenn wir den vollständigen Graphen K_n so in m kleinere Cliques zerlegen, dass jede Kante in genau einer Clique liegt, dann ist $m \geq n$.

Beweis: Identifiziere X mit der Edmengen K_n , ordne die Mengen A_i den Edmengen der Cliques zu, dann liefert Satz 3 genau die Aussage.

Einige Sätze über die Zerlegung von Graphen

neue Idee: Zerlege K_n in möglichst wenige vollständige bipartite Graphen, so dass jede Kante in genau einem dieser Graphen liegt.



→ Nummeriere die Ecken $1, 2, \dots, n$

→ Nimm einen vollst. bipartiten Graphen, indem man 1 mit den restl. Ecken verbindet $\Rightarrow K_{1, n-1}$

→ Als nächstes verbinde 2 mit den restl. Ecken $\Rightarrow K_{1, n-2}$

⋮

→ Als letztes erhalte $K_{1,1}$

Gibt das nicht besser mit weniger Graphen?

Einige Sätze über die Zerlegung von Graphen

Satz 4.1: Wenn man den Graphen K_n in vollständige bipartite Untergraphen $H_1, \dots, H_m$ zerlegt, dann ist $m \geq n-1$

Fakt: Für diesen Satz ist kein vollständig kombinatorischer Beweis bekannt!

Einige Sätze über die Zerlegung von Graphen

Satz 4: Wenn man den Graphen K_n in vollständige bipartite Untergraphen $H_1, \dots, H_m$ zerlegt, dann ist $m \geq n-1$.

Beweis:

- Sei die Eckenmenge von K_n bezeichnet mit $\{1, \dots, n\}$
- Seien L_j, R_j die definierten Eckenmengen der vollständigen bipartiten Graphen H_j , $j=1, \dots, m$
- Ordne jeder Ecke i eine Variable x_i zu.
- Da $H_1, \dots, H_m$ eine Zerlegung des K_n bilden, haben wir:
$$\sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{a \in L_k} x_a \cdot \sum_{b \in R_k} x_b \right) \quad (1)$$

• Nehme nun an, der Satz gilt nicht, also $m \leq n-1$. Dann hat das folgende LGS

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \sum_{a \in L_k} x_a = 0 \quad (k=1, \dots, m) \end{cases}$$

weniger Gleichungen als Variablen. Also gibt es

eine nicht-triviale Lösung $c_1, \dots, c_n$. Aus (1) schließen wir: $\sum_{i < j} c_i c_j = 0$

• Aber dies impliziert: $0 = (c_1 + \dots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_i c_j = \sum_{i=1}^n c_i^2 > 0 \quad \downarrow$

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!

Gibt es Fragen?