6. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Dienstag 25.5.**[1] um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem. Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Falls die Vektoren linear abhängig sind, bestimmen Sie die Dimension ihrer linearen Hülle (Antworten bitte mit Begründungen).

$$(a)\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b)\quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$(c)\quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Seien a, b und c drei paarweise verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

[1] Ausnahmsweise wegen Pfingsten.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir definieren Teilmengen U_1 und U_2 des $\mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=2}^{n} x_i = x_1 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_2 = \cdots = x_n = -x_1 \right\}$$

Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sind und dass $\mathbb{R}^n = U_1 \oplus U_2$ gilt. Bestimmen Sie auch $\dim(U_1)$ und $\dim(U_2)$.