Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 8.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

31. Mai bis 4. Juni 2021

Zusammenfassung der 8.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 8.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein.
Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um Matrizen, Abschnitt V.2 im Skript.

Matrizen

Definition

Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-**Matrix** A mit Einträgen aus K ist ein rechteckiges Schema (eine Tabelle) mit Einträgen aus K, die aus m Zeilen und n Spalten besteht:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man schreibt dafür kurz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ (der erste Index gibt die Zeile i an, in der das Element in der Matrix A auftaucht, der zweite Index j gibt die entsprechende Spalte an).
Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K bezeichnen wir mit $M(m \times n, K)$.

Matrizen

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 1 & -1 \\ 2+3i & 5i & i & 7 \\ -i & 3 & 1 & 8-4i \end{pmatrix}$$

Matrizen

Die Addition zweier Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ gleichen Formats erfolgt eintragsweise:

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Die Multiplikation von A mit einem Skalar $\lambda \in K$ ist ebenfalls eintragsweise definiert:

$$\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$4 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise wird $M(m \times n, K)$ zu einem K-Vektorraum.

Satz: Es gilt $\dim(M(m \times n, K)) = mn$.

Beweis: Siehe Satz V.2.2. im Skript.

Definition (Matrixmultiplikation)

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,k}$ eine $m \times k$-Matrix und sei $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{k,n}$ eine $k \times n$-Matrix (mit Einträgen aus demselben Körper K). Dann ist das Produkt AB diejenige $m \times n$-Matrix, deren Eintrag $(AB)_{ij}$ an der Stelle $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ gegeben ist durch

$$(AB)_{ij} := \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}.$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen ist also $AB \neq BA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -3 & 13 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele finden Sie im Skript auf den Seiten 73–74.

Lemma (Rechenregeln für Matrizen)

Sei K ein Körper und seien $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.
Ferner seien $A, A' \in M(m \times k, K)$, $B, B' \in M(k \times n, K)$ und $C \in M(n \times l, K)$.
Dann gilt:
1) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$ für alle $\lambda \in K$.
2) $A(B + B') = AB + AB'$
3) $(A + A')B = AB + A'B$
4) $A(BC) = (AB)C$

Beweis: Siehe Lemma V.2.4. im Skript.

Matrizen

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

E_n nennt man die $n \times n$-**Einheitsmatrix**.

Der Eintrag von E_n an der Stelle (i, j) ist also

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j, \\ 0 \text{ für } i \neq j. \end{cases}$$

Das Symbol δ_{ij} heißt auch **Kronecker-Symbol**.

Bemerkung: Für alle $m \times n$-Matrizen A gilt

$$E_m A = A \quad \text{und} \quad AE_n = A.$$

Definition

Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt **invertierbar**, falls es eine Matrix $B \in M(n \times n, K)$ mit $AB = E_n = BA$ gibt.

Bemerkung: Ist $A \in M(n \times n, K)$ invertierbar, so existiert **genau ein** $B \in M(n \times n, K)$ mit $AB = E_n = BA$. Diese Matrix nennt man dann die **inverse Matrix** von A und bezeichnet sie mit A^{-1}.

Beispiele:
Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiele (Fortsetzung):
Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar. Anderenfalls gäbe es nämlich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dann müsste einerseits $a + 3c = 1$ und andererseits $2a + 6c = 0$ gelten, was auf den Widerspruch $0 = 2(a + 3c) = 2$ führt.

Weitere Beispiele finden Sie im Skript auf Seite 76.

Lemma

Sind $A, B \in M(n \times n, K)$ invertierbar, so ist auch AB invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definition

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ eine $m \times n$-Matrix. Die **transponierte Matrix** A^T von A ist diejenige $n \times m$-Matrix, deren Eintrag an der Stelle $(j, i) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ gleich a_{ij} ist.
Die Zeilen von A^T werden also von den Spalten der Matrix A gebildet.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele im Skript auf Seite 77.

Lemma

Für alle $A, B \in M(m \times n, K)$ und alle $C \in M(n \times k, K)$ gilt:
1) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ für alle $\lambda \in K$.
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(AC)^T = C^T A^T$.

Beweis: Übung.

Definition

Sei $A \in M(m \times n, K)$. Wir definieren $F_A : K^n \to K^m$ durch $F_A(x) := Ax$ für alle $x \in K^n$.

Bemerkung: Die Abbildung F_A ist linear.

Matrizen

Der nächste Satz besagt, dass sich jede lineare Abbildung von K^n nach K^m auf diese Weise durch eine Matrix darstellen lässt.

Satz: Sei $F : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Dann existiert genau eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ mit $F = F_A$.
Die j-te Spalte von A ist gegeben durch den Vektor $F(e_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis: Siehe Satz V.2.11. im Skript.

Auf Seite 78 im Skript finden Sie ein Beispiel zur Anwendung dieses Satzes.

Satz (Einseitige Inverse sind Inverse):
Seien $A, B \in M(n \times n, K)$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) A ist invertierbar mit $A^{-1} = B$.
2) $AB = E_n$
3) $BA = E_n$

Beweis: Siehe Satz V.2.12. im Skript.

Matrizen

Darstellende Matrizen: Seien V und W Vektorräume über K mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und sei $F : V \to W$ linear.
Ferner seien $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ eine geordnete Basis von W.
Die **darstellende Matrix** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ von F bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist diejenige $m \times n$-Matrix, deren j-te Spalte gleich $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(F(a_j))$ ist (für $j = 1, \ldots, n$).
Dabei bezeichnet $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(F(a_j))$ den Koordinatenvektor von $F(a_j)$ bzgl. $\mathcal{B}$ (siehe Folien der letzten Woche).

Für alle $v \in V$ gilt

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(F(v)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(v).$$

Ist $V = W$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, so schreibt man auch kurz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ anstelle von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.

Ein Beispiel zur Bestimmung von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ finden Sie im Skript auf den Seiten 79–80.

Lemma

Seien U, V, W Vektorräume über K mit den Dimensionen $\dim(U) = k$, $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$.
Seien $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von W und $\mathcal{C}$ eine geordnete Basis von U.
Ferner seien $F : V \to W$ und $G : U \to V$ lineare Abbildungen.
Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(F \circ G) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(G)$$

Beweis: Siehe Lemma V.2.13. im Skript.

Satz: Seien V und W Vektorräume über K mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$.
Dann gilt $\mathrm{Hom}(V, W) \cong M(m \times n, K)$.
Insbesondere ist $\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = mn$.

Beweis: Siehe Satz V.2.14. im Skript.

Lemma

Seien V und W Vektorräume über K mit $\dim(V) = \dim(W) = n$. Sei $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von W. Ferner sei $F : V \to W$ linear.
Dann gilt: F ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ invertierbar ist. Ggf. gilt dann $(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F))^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F^{-1})$.

Beweis: Siehe Lemma V.2.15. im Skript.

Definition

Sei V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$.
Seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_n')$ zwei geordnete Basen von V. Dann heißt $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ die **Basiswechselmatrix** oder **Transformationsmatrix** von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$.

Bemerkung:
1) $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ ist eine $n \times n$-Matrix, deren j-te Spalte gleich $\mathcal{K}_{\mathcal{B}'}(b_j)$ ist.
2) Für alle $v \in V$ gilt $\mathcal{K}_{\mathcal{B}'}(v) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(v)$.
3) $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ ist invertierbar mit $(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})^{-1} = T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$.

Matrizen

Lemma

Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K und sei $F : V \to W$ linear.
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ geordnete Basen von V und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geordnete Basen von W. Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$$

Beweis: Siehe Lemma V.2.17. im Skript.

Definition

Sei $A \in M(m \times n, K)$. Wir bezeichnen die Spaltenvektoren von A mit $a_1, \ldots, a_n \in K^m$ und die Zeilenvektoren von A mit $z_1, \ldots, z_m \in M(1 \times n, K)$ und setzen

$$S(A) := \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$$

und

$$Z(A) := \mathrm{span}\{z_1, \ldots, z_m\}.$$

$S(A)$ heißt der **Spaltenraum** und $Z(A)$ der **Zeilenraum** von A. Ferner heißt $\text{S-}\mathrm{Rang}(A) := \dim(S(A))$ der **Spaltenrang** und $\text{Z-}\mathrm{Rang}(A) := \dim(Z(A))$ der **Zeilenrang** von A.

Bemerkung: Es gilt

$$S(A) = \{Ax : x \in K^n\} = \mathrm{Im}(F_A).$$

Lemma

Sei $A \in M(n \times n, K)$. A ist invertierbar genau dann, wenn $S\text{-}\mathrm{Rang}(A) = n$ gilt.

Beweis: Siehe Lemma V.2.19. im Skript.