Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum Kapitel 2.8 – Extrema unter Nebenbedingungen

Während in Kapitel 2.7 lokale Extremstellen einer (mindestens einmal) differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ – auf einer meist offenen Teilmenge D von $\mathbb{R}^n$, aber ohne irgendwelche weiteren Nebenbedingungen untersucht wurden, geht es in diesem letzten Kapitel um **Extrema unter Nebenbedingungen**.

Grundlegend ist hier Definition 2.34:
Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ gegeben, so hat f an einer Stelle $x \in D$ ein **Maximum unter der Nebenbedingung $\mathbf{g = c}$**, falls $g(x) = c$ ist und für alle $y \in D$ mit $g(y) = c$ gilt: $f(y) \leq f(x)$.

Mit anderen Worten gilt: $f(x)$ ist maximal unter der Nebenbedingung $g(x) = c$.

Wird dagegen die Ungleichung $f(y) \leq f(x)$ nur für alle y aus einer Umgebung von x mit $g(y) = c$ verlangt, so spricht man von einem **lokalen Maximum unter der Nebenbedingung $\mathbf{g = c}$**; siehe Definition 2.36.

Zur Lösung von Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen sind die **Lagrange-Multiplikatoren** grundlegend, die im Zusammenhang mit Definition 2.35 eingeführt werden:

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und ist $c \in \mathbb{R}$, so heißt ein innerer Punkt x von D ein **kritischer Punkt** für das Problem $max\, f$ in D unter der Nebenbedingung $g = c$, falls $g(x) = c$ ist und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\bigtriangledown f(x) = \lambda \bigtriangledown g(x).$$

Satz 2.19 liefert ein **Notwendiges Kriterium für lokale Extrema unter Nebenbedingung**, wobei aber eine Korrektur hinsichtlich des Nicht-Verschwindens des Gradienten von g an der Stelle x vorzunehmen ist:

Falls $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in einer offenen Menge D sind, dann ist jede lokale Lösung $x \in D$ des Problems $max\, f$ unter der Nebenbedingung $g = c$ ein kritischer Punkt, wenn der Gradient $\bigtriangledown g(x)$ nicht der Nullvektor ist.

In noch folgenden Ergänzungen wird eine Beweisskizze – mit einem Verweis auf den sogenannten Satz über *Implizite Funktionen* – erfolgen sowie ein Gegenbeispiel, falls $\bigtriangledown g(x)$ der Nullvektor ist.

Wir verweisen hier auch noch auf die in Aufgabe 45.) zu behandelnde **Lagrange-Funktion** $\mathcal{L}$, die eine reelle Funktion ist und auf $D \times \mathbb{R}$ definiert ist.

Schließlich erwähnen wir noch – siehe die Bemerkung auf Seite 253:

Ein Maximierungsproblem der Gestalt $max\, f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) \leq c$ kann auf ein Maximierungsproblem der Gestalt $max\, f(x)$ unter der Nebenbedingung $\tilde{g} = 0$ zurückgeführt werden:

Setze dazu $\tilde{g}(x) := max(0, g(x) - c)$ für $x \in D$.
Dann gilt nämlich $g(x) \leq c$ genau dann, wenn $\tilde{g}(x) = 0$ ist.