9. Übungsblatt zu "Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 10.6.2021

33i) Stellen Sie das – offene – Intervall $]0,1[$ dar als eine Vereinigung $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ von abzählbar vielen *abgeschlossenen* Mengen U_n.

ii) Entscheiden Sie – mit Begründung, ob die Menge $A := \{(x, \frac{1}{1-x^2}) \mid -1 < x < 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

34.) Für $z_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist die $(n-1)$-dimensionale *Sphäre* $S_r(z_0)$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r definiert durch

$$S_r(z_0) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid d(z, z_0) = r\}.$$

$S_r(z_0)$ ist damit der Rand des abgeschlossenen Balls $B_r(z_0)$.

Für $n = 3$ betrachten wir nun speziell die Punkte $z_0 = (0,0,1)$, $N = (0,0,2)$ sowie die Menge $D := S_1(z_0) \setminus \{N\}$. Die Menge D entsteht also aus der Sphäre $S_1(z_0)$, indem ihr oberster Punkt N – der als Nordpol gedeutet wird – entfernt wird.
Für $(x_1, x_2, x_3) \in D$ setzen wir

$$P_1(x_1, x_2, x_3) := \tfrac{2x_1}{2-x_3},\ P_2(x_1, x_2, x_3) := \tfrac{2x_2}{2-x_3}.$$

Die **Stereografische Projektion** $P : D \to \mathbb{R}^2$ ist definiert durch

$$P(x_1, x_2, x_3) := (P_1(x_1, x_2, x_3), P_2(x_1, x_2, x_3)) = (\tfrac{2x_1}{2-x_3}, \tfrac{2x_2}{2-x_3}).$$

i) Verifizieren Sie:
Für alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$ liegen die drei Punkte $N, x, (P_1(x), P_2(x), 0) \in \mathbb{R}^3$ auf einer Geraden, indem Sie – mit Begründung – ein $\lambda \in [0,1]$ angeben mit

$$x = \lambda \cdot N + (1-\lambda) \cdot (P_1(x), P_2(x), 0).$$

Dabei wird übrigens der Punkt $P(x) \in \mathbb{R}^2$ oft mit dem Punkt $(P_1(x), P_2(x), 0) \in \mathbb{R}^3$ identifiziert.

ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung P bijektiv und stetig ist. – Hinsichtlich der Stetigkeit bedeutet das: Die Abbildungen P_1 und P_2 sind stetig.

35.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := e^{x+2y} + 2x \cdot sin(z) + z^2 \cdot x \cdot y.$$

Berechnen Sie $\bigtriangledown f(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, und entscheiden Sie, ob f überall auf $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist.

36.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \tfrac{x \cdot y}{x^2+y^2}, \text{ falls } (x,y) \neq (0,0)\,;\ f(0,0) := 0.$$

Zeigen Sie, dass f überall auf $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie $\bigtriangledown f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entscheiden Sie auch – mit Begründung, in welchen Punkten f total differenzierbar ist.