Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar Kombinatorische Geometrie

Leipzig, den 11.6.2021

Übungsaufgaben zum Satz von Helly

I) Es sei K eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und es seien – für ein m mit $n+1 \leq m < \infty$ – abgeschlossene Halbräume

$$H_i = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, v_i \rangle \geq d_i\} \text{ für } 1 \leq i \leq m$$

mit gewissen $v_1, .., v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $d_1, ..., d_m \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\langle \, , \, \rangle$ das Standard-Skalarprodukt bezeichnet.

Beweisen Sie: Ist eine konvexe Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ in der Vereinigung all dieser Halbräume enthalten, so gibt es bereits $n+1$ Halbräume unter ihnen, deren Vereinigung K umfasst.

Geben Sie auch ein Beispiel an, das zeigt, dass die Behauptung falsch wird, wenn die zuletzt genannte Zahl $n+1$ durch n ersetzt wird.

Hinweis: Es sind nicht nur die abgeschlossenen Halbräume selbst konvex, sondern auch deren Komplemente.

II) Für $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die *Verschiebung* um den Vektor v; das heißt: $\tau_v(x) = x + v$ für $x \in \mathbb{R}^n$.
Es sei $m \geq n+1$, es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, und es seien weitere konvexe Mengen $K_1, ..., K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Ferner gebe es zu je $n+1$ der Mengen $K_1, ..., K_m$ ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\tau_v(K)$ all diese $n+1$ Mengen schneidet.
Zeigen Sie, dass es dann auch ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\tau_{v_0}(K)$ alle Mengen $K_1, ..., K_m$ schneidet.

Hinweis: Für $1 \leq i \leq m$ sind die Mengen $K_i' := K_i - K := \{v - w \mid v \in K_i, w \in K\}$ konvex.

III) In $\mathbb{R}^2$ seien endlich viele abgeschlossene Strecken $s_1, ..., s_m$ für ein $m \geq 3$ gegeben, die alle zueinander parallel sind, von denen aber keine zwei eine gemeinsame Trägergerade haben. Ferner gebe es zu je drei dieser Strecken eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die jede dieser drei Strecken schneidet. Zeigen Sie, dass es dann sogar eine Gerade gibt, die alle Strecken $s_1, ..., s_m$ schneidet.

Hinweis: Nach Durchführung einer Drehung kann angenommen werden, dass alle Strecken vertikal sind; die haben dann also die Gestalt

$$s_i = \{(x, y) \mid x = u_i, y \in [v_i, w_i]\}$$

für geeignete $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}$ mit $v_i < w_i$.

Betrachten Sie die – konvexen – Mengen

$$K_i := \{(m, c) \in \mathbb{R}^2 \mid v_i \leq m u_i + c \leq w_i\} \text{ für } 1 \leq i \leq m,$$

interpretieren Sie die Beziehung $(m, c) \in K_i$ in Bezug auf die Aufgabe, und wenden Sie auf $K_1, ..., K_m$ den Satz von Helly an.

Die Konvexität der Mengen $K_1, ..., K_m$ folgt dabei aus folgender – leicht zu verifizierender – Beobachtung:
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und K eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^k$, so ist $f^{-1}(K)$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.