Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zu den Kapiteln 2.1 – Motivation,
zum Kapitel 2.2 – Konvergenz und Mengen in $\mathbb{R}^n$,
und zum Kapitel 2.3 – Stetige Funktionen

In der Analysis haben wir uns – in der Mathematik I – nur mit Funktionen in einer Variablen beschäftigt. Wir möchten da nun einiges übertragen auf Funktionen in mehreren Variablen. Im vorliegenden Kommentar geht es erst einmal um diejenigen Aspekte, die der Differenzierbarkeit vorausgehen.

In der Analysis in einer Variablen sind $\epsilon-$ Umgebungen von großem Interesse gewesen. Wenn nun der Definitionsbereich einer Funktion nicht mehr in $\mathbb{R}$, sondern in $\mathbb{R}^n$ – für eine beliebige natürliche Zahl n – enthalten ist, müssen diese $\epsilon-$ Umgebungen durch andere Mengen ersetzt werden, in denen je zwei Punkte einen kleinen Abstand haben. – Zu dem Zweck muss man erst einmal Abstände berechnen; das geschieht mit Hilfe des Satzes des Pythagoras in Definition 2.1; siehe hierzu auch die nachfolgende Skizze sowie Kapitel 1.3, wo bereits Längen eine Rolle gespielt haben.
Genauer liefert die Formel in Definition 2.1 aufgrund des Satzes des Pythagoras den Abstand zweier Punkte in der Ebene; laut erwähnter Skizze ist das auch immer noch in unserem Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ richtig.
Mit Hilfe dieses Abstandes wird der **abgeschlossene Ball** $B_r(z)$ um einen Punkt z mit Radius r definiert: Der besteht aus allen Punkten, die von z höchstens den Abstand r haben. – Für $n = 2$ erhalten wir eine Kreisscheibe, für $n = 3$ eine gewöhnliche Kugel (genauer: Vollkugel).
Mit diesem Begriff wird die Konvergenz einer Folge übertragen:
Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert $z \in \mathbb{R}^n$, wenn – für jedes $\epsilon > 0$ – schließlich alle x_k im abgeschlossenen Ball um z mit dem Radius ϵ liegen. Äquivalent dazu ist, dass alle n Koordinatenfolgen konvergieren. Daher ergibt sich auch wie bereits in der Menge $\mathbb{R}$:

Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine **Fundamentalfolge** – oder eine **Cauchy-Folge** – ist.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der einer offenen Menge:
Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ ist **offen**, wenn zu jedem $z \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass auch $B_\epsilon(z)$ in U enthalten ist. Das bedeutet: Um jeden Punkt in U kann man einen Ball legen, der immer noch in U enthalten ist.
Einfache – aber nicht völlig triviale – Beispiele sind *offene Bälle:* Für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$ ist der *offene Ball* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, z) < \epsilon\}$ offen.

Neben den offenen Mengen sind auch die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ grundlegend:
Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.
Äquivalent dazu ist: Der **Rand** ∂A von A ist in A enthalten.
Dabei besteht der Rand ∂M einer Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ aus allen Punkten $z \in \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft, siehe Definition 2.8:
Für jedes $\epsilon > 0$ schneidet der abgeschlossene Ball $B_\epsilon(z)$ sowohl die Menge M als auch ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M$. – In der Vorlesungsmitschrift ist der Zusatz “alle hinreichend kleinen” $(\epsilon > 0)$ nicht falsch, aber überflüssig. Allerdings kommt es primär auf kleine positive ϵ an.

Es sei hervorgehoben – siehe auch die Beispiele 2.1:

Es gibt Mengen, die weder offen, noch abgeschlossen sind.
Seien etwa $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Dann ist das Rechteck $[a, b] \times]c, d[$ weder offen, noch abgeschlossen. Es enthält die beiden vertikalen Seiten (ohne ihren Endpunkten), aber nicht die beiden horizontalen Seiten.

Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ ist **beschränkt**, wenn sie in irgendeinem abgeschlossenen Ball enthalten ist.

Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Es gilt – siehe Satz 2.5: Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge von Elementen in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt. Genauer folgt aus der Beschränktheit von K, dass jede solche Folge überhaupt eine konvergente Teilfolge besitzt. Deren Grenzwert liegt in K, weil K abgeschlossen ist.

In der Literatur findet man noch weitere Kriterien für die Kompaktheit, die auch noch viel allgemeiner gelten; diese Kennzeichnungen sind aber abstrakter als für unsere Zwecke notwendig.

Schließlich wird in Kapitel 2.3 der Begriff der *Stetigkeit* auf Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ – für $D \subseteq \mathbb{R}^n$ – übertragen.
Eine Faustregel für die Stetigkeit einer reellwertigen Funktion f, die auf irgendeinem Intervall von $\mathbb{R}$ definiert ist, ist gewesen: Der Graph von f kann gezeichnet werden, ohne den Stift abzusetzen. – Das ist aber ohnehin keine exakte Definition. In Definition 2.15 wird die Stetigkeit von Funktionen auf Teilmengen D von $\mathbb{R}^n$ nun so übertragen, dass der Fall $n = 1$ nach wie vor erfasst wird:
f ist **stetig** in einem Punkt $z \in D$, falls für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit $lim_{k \to \infty} x_k = z$ auch gilt: $lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(z)$.

Ist eine stetige Funktion f auf einer "zusammenhängenden" (was wir nicht exakt definiert haben) Teilmenge D von $\mathbb{R}^2$ definiert, so bilden alle Punkte der Gestalt $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ für $(x_1, x_2) \in D$ eine "Landschaft" wie im Bild auf Seite 132: Der Funktionswert $f(x_1, x_2)$ gibt dabei jeweils die Höhe dieses Punktes an.

Hier noch einige wichtige Eigenschaften und Beispiele von stetigen Funktionen – siehe auch Satz 2.6 und Satz 2.7:

(I) Summe, Differenz und Produkt von stetigen Funktionen sind wieder stetig. Der Quotient ist ebenfalls stetig, falls der Nenner immer von 0 verschieden ist.

(II) Insbesondere sind alle Polynome stetig; das sind solche Funktionen, die man, ausgehend von den Variablen $x_1, ..., x_n$ und fixierten reellen Zahhlen, durch fortgesetztes Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren erhält, Beispiel:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^4 - 16x_1 \cdot x_3^2 + 5x_1^3 \cdot x_2^2.$$

(III) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf K einen maximalen Wert und einen minimalen Wert an; das heißt, es existieren (nicht unbedingt eindeutig bestimmte) $a, b \in K$, so dass für alle $z \in K$ gilt: $f(a) \leq f(z) \leq f(b)$.