Lösungen Übung 7

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen linear sind und begründen Sie Ihre Antworten.
1) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_1(x) := \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

2) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{pmatrix}.$$

3) $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}.$$

Lösung:

1) F_1 ist nicht linear, denn z. B. ist $F_1(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
F_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 2(x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = F_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + F_2\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right), \\
F_2\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ 2\lambda x_1 \\ \lambda x_1 - \lambda y_1 \end{pmatrix} = \lambda F_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Daher ist F_2 linear.
3) F_3 ist nicht linear, denn z. B. ist

$$F_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2F_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)**.** Es bezeichne $V_{\mathbb{R}}$ den Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen

Sie Ihre Antworten.
1) $F_1 : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_1(f)(x) := f(x^2+1) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall f \in V_{\mathbb{R}}.$$

2) $F_2 : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_2(f)(x) := x^3 f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall f \in V_{\mathbb{R}}.$$

3) $F_3 : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ mit

$$F_3(f)(x) := (f(x))^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall f \in V_{\mathbb{R}}.$$

Lösung:
1) Für alle $f, g \in V_{\mathbb{R}}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_1(f+g)(x) = (f+g)(x^2+1) = f(x^2+1) + g(x^2+1) = F_1(f)(x) + F_1(g)(x),$$
$$F_1(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x^2+1) = \lambda f(x^2+1) = \lambda F_1(f)(x).$$

Also ist $F_1(f+g) = F_1(f) + F_1(g)$ und $F_1(\lambda f) = \lambda F_1(f)$.
Somit ist F_1 linear.
2) Wiederum gilt für alle $f, g \in V_{\mathbb{R}}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_2(f+g)(x) = x^3(f+g)(x) = x^3 f(x) + x^3 g(x) = F_2(f)(x) + F_2(g)(x),$$
$$F_2(\lambda f)(x) = x^3(\lambda f)(x) = \lambda x^3 f(x) = \lambda F_2(f)(x).$$

Also ist $F_2(f+g) = F_2(f) + F_2(g)$ und $F_2(\lambda f) = \lambda F_2(f)$.
Somit ist auch F_2 linear.
3) F_3 ist nicht linear, denn z. B. gilt für die konstanten Funktionen 1 und 2:
$F_3(2) = 4 \neq 2 = 2F_3(1)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei U ein Unterraum von W. Zeigen Sie, dass das Urbild $F^{-1}[U]$ ein Unterraum von V ist.

Lösung:
Wegen $F(0) = 0 \in U$ ist $0 \in F^{-1}[U]$.
Seien nun $v_1, v_2 \in F^{-1}[U]$ beliebig. Dann gilt $F(v_1), F(v_2) \in U$. Da U ein Unterraum ist, folgt $F(v_1) + F(v_2) \in U$. Wegen der Linearität von F ist aber $F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2)$. Also ist $F(v_1 + v_2) \in U$ und somit $v_1 + v_2 \in F^{-1}[U]$.
Ist ferner $\lambda \in K$, so gilt (weil U ein Unterraum und F linear ist) auch $F(\lambda v_1) = \lambda F(v_1) \in U$, also auch $\lambda v_1 \in F^{-1}[U]$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Sei $P : V \to V$ linear mit $P^2 := P \circ P = P$ (solche Abbildungen nennt man *Projektionen*). Zeigen Sie $V = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.

Lösung:
1) Sei zunächst $v \in V$ beliebig. Dann ist $w := P(v) \in \operatorname{Im}(P)$ und für $u := v - P(v)$ gilt $P(u) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$, also $u \in \ker(P)$. Ferner ist $v = u + w$. Damit ist $V = \ker(P) + \operatorname{Im}(P)$ gezeigt.
2) Sei nun $v \in \ker(P) \cap \operatorname{Im}(P)$. Wegen $v \in \operatorname{Im}(P)$ existiert ein $u \in V$ mit $P(u) = v$. Wegen $v \in \ker(P)$ folgt daraus $0 = P(v) = P^2(u) = P(u) = v$. Damit ist auch $\ker(P) \cap \operatorname{Im}(P) = \{0\}$ gezeigt.