Lösungen Übung 8

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte (komplexe Zahlen sollten dabei wieder in der Form $a+ib$ dargestellt werden).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2-3i & i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:
(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 21 \\ -2 & -3 & -8 \\ 12 & 11 & 32 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 29 & 13 \\ 12 & 31 & 10 \\ -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2-3i & i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6i & (2-3i)(1-i)+3i \\ -4+2i & 4+2i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6+6i & -1-2i \\ -4+2i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (dabei bezeichnet A^n das n-fache Produkt von A mit sich selbst).

Lösung: Vollständige Induktion: Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Angenommen nun die Formel gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix},$$

was gerade die Behauptung für $n + 1$ ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $A \in M(m \times n, K)$ und alle $B \in M(n \times k, K)$ gilt $(AB)^T = B^T A^T$.

Lösung: Man beachte zunächst, dass sowohl $(AB)^T$ als auch $B^T A^T$ beide $k \times m$-Matrizen sind. Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt zudem

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{l=1}^{n} A_{jl} B_{li} = \sum_{l=1}^{n} B^T_{il} A^T_{lj} = (B^T A^T)_{ij}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusätzlich betrachten wir noch die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ und $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

Lösung: Die Spalten von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sind $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_1), \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_2), \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_3)$. Es gilt

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3), \\ e_2 &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3), \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-b_1 + b_2 + b_3). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ sind einfach b_1, b_2, b_3 (denn $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$), also

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Wir betrachten die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ 2x + y + z \\ -x + 3y + z \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie in Aufgabe 4.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$.

Lösung: Die Spalten von $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$ sind gegeben durch $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$. Es gilt

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; F(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiter gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F) = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F) T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ und daher folgt mit dem Ergebnis von Aufgabe 4:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$